PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 7. 1. April 1918. Redaktionsschluß für No. 9 am 3. April 1918. 19. Jahrgang.

INHALT:

Originalmitteilungen:

Cl. Schaefer, Eine einfache Herleitung der verallgemeinerten Lagrangeschen Gleichungen für nichtholonome Koordinaten. S. 129.

L. S. Ornstein u. F. Zernike, Die linearen Dimensionen der Dichteschwankungen. S. 134.

A. Smekal, Adiabatenhypothese und Boltzmannsches Prinzip. S. 137.

H. Witte, Über den Schraum. S. 142.

Besprechungen:

A. Sommerfeld, Goethes Farbenlehre im Urteile der Zeit. S. 151.

J. A. Möllinger, Wirkungsweise der Motorzähler und Meßwandler. S. 152.

A. Einstein, Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie. S. 152.

K. Schwarzschild, Über das System der Fixsterne. S. 152.

Personalien. S. 152.

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Eine einfache Herleitung der verallgemeinerten Lagrangeschen Gleichungen für nichtholonome Koordinaten.

Von Clemens Schaefer.

§ 1.

Unter „wahren Koordinaten" eines mechanischen Systems versteht man eine Anzahl von Größen, die geeignet sind, den augenblicklichen Zustand des Systems eindeutig zu definieren; wir wollen sie im folgenden mit q_k ($k = 1, 2, \ldots n$) bezeichnen, wenn n die Anzahl der Freiheitsgrade des Systems ist; die Ableitungen derselben nach der Zeit, $\frac{d\,q_k}{dt}$, die allgemeinen Geschwindigkeiten bezeichnen wir durch $\dot{q}_k$; eine virtuelle Änderung einer Koordinate q_k durch δq_k, wie üblich. Es können dann lineare Differentialausdrücke mit den δq_k und gewissen Funktionen a_{kr} der q_k gebildet werden von der Form:

$$\delta \pi_r = \sum_k a_{kr}\, \delta q_k \quad (k, r = 1, 2, \ldots n), \qquad (1)$$

und diese Ausdrücke können integrabel sein oder nicht. Im ersteren Falle müssen bekanntlich die Gleichungen bestehen:

$$\frac{\partial a_{k\sigma}}{\partial q_\lambda} - \frac{\partial a_{\lambda\sigma}}{\partial q_k} = 0, \qquad (2)$$

und dann läßt sich aus (1) sofort π_r als Funktion der q_k gewinnen; in diesem Falle sind, wie die q_k, auch die Größen π_r wahre Koordinaten.

Sind dagegen die Integrabilitätsbedingungen (2) nicht erfüllt, so sind die Größen $\delta \pi_r$ unexakte Differentiale, und man nennt sie dann Differentiale von „nichtholonomen" Koordinaten oder von „Quasikoordinaten".

Es scheint die Physiker die Tatsache bisher wenig interessiert zu haben, daß für nichtholonome Koordinaten die Lagrangeschen Gleichungen zweiter Art der Dynamik nicht gelten, sondern man scheint die ganze Frage ziemlich allgemein als physikalisch uninteressant betrachtet zu haben.

In Wirklichkeit jedoch gibt es einen Fall von fundamentaler Wichtigkeit, in dem der Unterschied zwischen holonomen und nichtholonomen Koordinaten von ausschlaggebender Bedeutung wird, nämlich bei der Ableitung der Eulerschen Gleichungen des starren Körpers, der in einem Punkte festgehalten wird, aus den Lagrangeschen. Und gerade auf diesem Beispiele beruht meine Überzeugung von der Notwendigkeit, diese ganze Frage auch in der Anfangsvorlesung der Mechanik zu erörtern. Deshalb mag manchem Fachgenossen eine etwas eingehendere Darstellung und eine einfache systematische Ableitung der für nichtholonome Koordinaten geltenden Gleichungen nicht unwillkommen sein, obwohl die folgenden Darlegungen natürlich nichts wesentlich Neues bieten können und wollen.

§ 2.

Wir wollen zunächst das erwähnte Beispiel des starren Körpers besprechen, der in einem Punkte festgehalten wird. Diesen machen wir zum Anfangspunkt O eines raumfesten Koordinatensystems xyz, und eines zweiten $\xi\eta\zeta$, das im Körper fest ist. Die Lage des starren Körpers kann dann durch Angabe der 9 Richtungskosinusse charakterisiert werden, zwischen denen aber 6 Relationen bestehen, die also, wie bekannt, nur drei unabhängigen Koordinaten äquivalent sind. Als solche wählt man seit alter Zeit die sog. Eulerschen Winkel, ϑ (Pendelungswinkel), φ (Präzessionswinkel), ψ (Eigendrehungswinkel)[1]), die also wahre Koordinaten sind. Eine infinitesimale Drehung des starren Körpers ist durch die drei Inkremente $\delta\vartheta, \delta\varphi, \delta\psi$ bestimmt. Andererseits kann sie charakterisiert werden durch die Komponenten $\delta\pi, \delta\chi, \delta\varrho$ (nach

1) Wegen der Bezeichnungen vgl. meine Einführung in die theoretische Physik, Bd. I, S. 334 ff.

den Achsen ξ, η, ζ des bewegten Koord.-Systems) des infinitesimalen Drehungswinkels um die instantane Rotationsachse. Und diese Größen $\delta\pi$, $\delta\chi$, $\delta\varrho$ hängen bekanntlich mit den Eulerschen Winkeln folgendermaßen zusammen:[1])

$$\left.\begin{aligned}\delta\pi &= \sin\psi\sin\vartheta\cdot\delta\varphi + \cos\psi\cdot\delta\vartheta + 0\cdot\delta\psi\\ \delta\chi &= \cos\psi\sin\vartheta\cdot\delta\varphi - \sin\psi\cdot\delta\vartheta + 0\cdot\delta\psi\\ \delta\varrho &= \cos\vartheta\cdot\delta\varphi + 0\cdot\delta\vartheta + 1\cdot\delta\psi\end{aligned}\right| \quad (3)$$

Das sind unexakte Differentiale, also sind die Größen $\delta\pi$, $\delta\chi$, $\delta\varrho$ als Differentiale nichtholonomer Koordinaten zu bezeichnen.

Werden die Gleichungen (3) auf beiden Seiten durch das Zeitelement δt, in dem wir die betrachtete Verrückung des starren Körpers vor sich gehend denken können, dividiert, und geht man zur Grenze $\delta t = 0$ über, so treten rechts die Größen $\frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$, $\frac{d\vartheta}{dt} = \dot{\vartheta}$, $\frac{d\psi}{dt} = \dot{\psi}$ auf, d. h. die Ableitungen der Größen φ, ϑ, ψ nach der Zeit, die demgemäß durch darübergesetzte Punkte bezeichnet werden. Auf der linken Seite würde die analoge Schreibweise, z. B. $\frac{d\pi}{dt} = \dot{\pi}$ mißverständlich sein, weil sie die Auffassung nahelegen könnte, daß diese Größen zeitliche Ableitungen von Funktionen π, χ, ϱ wären, was ja nur der Fall sein könnte, wenn die Gleichungen (3) integrabel, π, χ, ϱ also wahre Koordinaten wären. Ich schlage deshalb dafür die Bezeichnung $\dot{\pi}$, $\dot{\chi}$, $\dot{\varrho}$ vor, die ich im folgenden anwenden werde. Wir haben also:

$$\left.\begin{aligned}\dot{\pi} &= \sin\psi\sin\vartheta\,\dot{\varphi} + \cos\psi\,\dot{\vartheta} + 0\cdot\dot{\psi}\\ \dot{\chi} &= \cos\psi\sin\vartheta\,\dot{\varphi} - \sin\psi\,\dot{\vartheta} + 0\cdot\dot{\psi}\\ \dot{\varrho} &= \cos\vartheta\,\dot{\varphi} + 0\cdot\dot{\vartheta} + 1\cdot\dot{\psi}\end{aligned}\right| \quad (4)$$

Die kinetische Energie L unseres starren Körpers läßt sich in bekannter Weise durch die drei Hauptträgheitsmomente A, B, C und die $\dot{\pi}$, $\dot{\chi}$, $\dot{\varrho}$, die „Komponenten der Rotationsgeschwindigkeit nach den bewegten Achsen" ausdrücken:

$$2L = A\dot{\pi}^2 + B\dot{\chi}^2 + C\dot{\varrho}^2. \quad (5)$$

Nehmen wir der Einfachheit halber den Körper als kräftefrei an, so wird die potentielle Energie $\Phi = 0$, und wenn wir jetzt unbedenklich die Lagrangeschen Gleichungen anwenden, so haben wir hier:

$$\frac{dL}{\partial\pi_r} - \frac{d}{dt}\frac{dL}{\partial\dot{\pi}_r} = 0,$$

wenn wir mit $\delta\pi_r$ eine der drei Größen $\delta\pi$, $\delta\chi$, $\delta\varrho$ bezeichnen.

Das liefert aber hier, da L nur von den Größen $\dot{\pi}_r$ abhängt:

$$\left.\begin{aligned}A\frac{d\dot{\pi}}{dt} &= 0\\ B\frac{d\dot{\chi}}{dt} &= 0\\ C\frac{d\dot{\varrho}}{dt} &= 0.\end{aligned}\right| \quad (6)$$

im Widerspruch zu den Eulerschen Gleichungen für den kräftefreien Körper:

$$\left.\begin{aligned}A\frac{d\dot{\pi}}{dt} + (C-B)\,\dot{\chi}\dot{\varrho} &= 0\\ B\frac{d\dot{\chi}}{dt} + (A-C)\,\dot{\varrho}\dot{\pi} &= 0\\ C\frac{d\dot{\varrho}}{dt} + (B-A)\,\dot{\pi}\dot{\chi} &= 0.\end{aligned}\right| \quad (7)$$

Die schon von Lagrange erkannte Unmöglichkeit, die Eulerschen Gleichungen (7) mit Hilfe der Lagrangeschen Gleichungen aus dem Ausdruck (5) der kinetischen Energie herzuleiten, ist so eklatant, daß sie regelmäßig den intelligenteren Studenten aufzufallen pflegt, auch ohne daß sie darauf aufmerksam gemacht werden.

Um so merkwürdiger ist es, daß die Aufstellung der verallgemeinerten Lagrangeschen Gleichungen, die auch für nichtholonome Koordinaten gelten, einerseits so spät erfolgt ist — Boltzmann[1]) 1902 —, andererseits, daß nicht etwa das obige Beispiel Boltzmann dazu geführt hat, sondern ein ziemlich komplizierter Fall von zyklischer Bewegung. Auch in dem bekannten Buche von Klein und Sommerfeld über den Kreisel findet sich zwar ein besonderer Paragraph über das Verhältnis der Eulerschen Gleichungen zu den Lagrangeschen, aber es wird kein Versuch gemacht, die allgemeinen Gleichungen zu gewinnen. Von allen mir bekannten Lehrbüchern in deutscher Sprache geht nur dasjenige von Boltzmann (Die Prinzipe der Mechanik S. 104 ff.), von den englischen nur das von Whittaker auf unsern Gegenstand ein[2]).

Nun hat aber Kirchhoff in seiner Mechanik[3]) die Eulerschen Gleichungen aus (5) abgeleitet, zwar ohne den Begriff der nichtholonomen Koordinaten einzuführen und ohne auch nur zu erwähnen, daß hier eine Schwierigkeit vorliegt. Darauf machte mich Herr A. Kneser aufmerksam, als ich mit ihm diese Frage besprach. Es muß also möglich sein, aus der Kirchhoffschen Deduktion die gewünschte Ver-

1) Z. B. Schaefer, a. a. O. S. 338.

1) L. Boltzmann, Ges. Abhandl., Bd. 3, S. 682.

2) Eine gute Darstellung findet sich noch in der math. Enzyklopädie, Bd. IV (Mechanik), Art. 6 (P. Stäckel) S. 589; hervorgehoben von der Literatur sei noch die Arbeit von G. Hamel, Zeitschr. f. Math. u. Physik 50, 1, 1904. (Anmerkung bei der Korrektur.)

3) G. Kirchhoffs Vorl. über Mechanik, 4. Aufl., S. 56 ff.

allgemeinerung zu gewinnen. Das ist in der Tat ein einfacher Weg, um zum Ziele zu gelangen, wie ich im folgenden auseinandersetzen will. Eine gleichfalls sehr einfache Herleitung findet sich in dem eben genannten Buche von Whittaker[1]), an dessen Bezeichnungsweise und Darstellung ich mich anlehne, indem ich sie nur mit der Kirchhoffschen verbinde.

§ 3.

Kirchhoff geht vom Hamiltonschen Prinzip aus, das wir schreiben:

$$\int_{t_0}^{t_1}(\delta L + \Sigma Q_k \delta q_k)\, dt = 0. \qquad (8)$$

Die kinetische Energie wird dabei als Funktion der wahren, voneinander unabhängigen Koordinaten q_k und der Geschwindigkeiten $\dot{q}_k$ betrachtet; Q_k ist die verallgemeinerte Kraftkomponente, die q_k zu verändern bestrebt ist. Also folgt in bekannter Weise:

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \left[\sum_k \left\{\frac{\partial L}{\partial q_k} + Q_k\right\} \delta q_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\frac{d\delta q_k}{dt}\right] = 0, \qquad (9)$$

$$(k = 1, 2, \ldots n)$$

wobei $\delta \dot{q}_k = \dfrac{d\delta q_k}{dt}$ gesetzt werden darf, da beim Hamiltonschen Prinzip die Zeit nicht mit variiert wird.

Jetzt führen wir n gleichfalls unabhängige lineare Aggregate $\delta\pi_r$ ein durch folgende Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \delta\pi_r &= \Sigma a_{kr}\, \delta q_k, \\ \dot{\pi}_r &= \Sigma a_{kr}\, \dot{q}_k, \end{aligned}\right\} \quad (r, k = 1, 2, \ldots n), \qquad (10)$$

welche nach den q_k bzw. den $\dot{q}_k$ aufgelöst lauten:

$$\left.\begin{aligned} \delta q_k &= \Sigma \beta_{rk}\, \delta\pi_r, \\ \dot{q}_k &= \Sigma \beta_{rk}\, \dot{\pi}_r; \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

die β_{rk} sind leicht zu berechnende Ausdrücke.

Jetzt setzen wir δq_k aus der ersten Gleichung (11), und ebenso $\dfrac{d\delta q_k}{dt}$, das durch Differentiation derselben Gleichung erhalten wird, in die Kirchhoffsche Gleichung (9) ein und erhalten:

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \left[\sum_k \sum_r \left\{\frac{\partial L}{\partial q_k} + Q_k\right\} \beta_{rk}\, \delta\pi_r + \sum_k \sum_r \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\frac{d}{dt}(\beta_{rk}\, \delta\pi_r)\right] = 0,$$

was ausgerechnet ergibt:

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \left[\sum_k \sum_r \left\{\frac{\partial L}{\partial q_k} + Q_k\right\} \beta_{rk}\, \delta\pi_r - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\frac{d\beta_{rk}}{dt}\right\} \delta\pi_r + \sum_k \sum_r \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\beta_{rk}\frac{d\delta\pi_r}{dt}\Bigg] = 0.$$

Setzen wir mit Kirchhoff (es ist dies eine etwas verschleierte partielle Integration):

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\beta_{rk}\frac{d\delta\pi_r}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\beta_{rk}\,\delta\pi_r\right] - \delta\pi_r \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\beta_{rk}\right),$$

so folgt aus der letzten Gleichung:

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \left[\sum_k \sum_r \left\{\frac{\partial L}{\partial q_k} + Q_k\right\} \beta_{rk} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\frac{d\beta_{rk}}{dt} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\beta_{rk}\right)\right] \delta\pi_r + \sum_k \sum_r \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\beta_{rk}\,\delta\pi_r = 0,$$

und da an den Grenzen des Hamiltonschen Integrals für t_0 und t_1 die Variationen $\delta\pi_r$ verschwinden, annulliert sich das letzte, aus dem Integral herausgetretene Glied, so daß übrig bleibt:

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \sum_k \sum_r \left[\left(\frac{\partial L}{\partial q_k} + Q_k\right)\beta_{rk} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\frac{d\beta_{rk}}{dt} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\beta_{rk} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\frac{d\beta_{rk}}{dt}\right)\right] \delta\pi_r = 0,$$

und daraus folgt in bekannter Weise:

$$\sum_k \beta_{rk}\left[\left(\frac{\partial L}{\partial q_k} + Q_k - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)\right] = 0, \qquad (12)$$

eine Gleichung, die implizite das gesuchte Resultat schon enthält. Man hat jetzt nur noch nötig, die Ableitungen nach q_k und $\dot{q}_k$ durch solche nach π_r und $\dot{\pi}_r$, sowie die Kräfte Q_k durch den neuen Koordinaten entsprechende Π_r zu ersetzen. Dabei schließen wir uns von jetzt ab im wesentlichen an Whittakers Ableitung an.

Zunächst hat der Ausdruck $\sum_k Q_k \beta_{rk}$ eine einfache Bedeutung, die man am besten erkennt, wenn man die Arbeit δA auf doppelte Weise darstellt;

$$\delta A = \sum_k Q_k\, \delta q_k = \sum_r \Pi_r\, \delta\pi_r. \qquad (13)$$

Dabei bedeutet Π_r die verallgemeinerte Kraftkomponente, die die Verrückung $\delta\pi_r$ hervorbringt, während alle andern $\delta\pi$ gleich Null bleiben. Aus (13) folgt unter Berücksichtigung der ersten Gl. (11):

$$\sum_r \sum_k Q_k \beta_{rk}\, \delta\pi_r = \sum_r \left(\sum_k Q_k \beta_{rk}\right) \delta\pi_r,$$

1) Whittaker, Analytical Dynamics, S. 41 ff.

also schließlich:

$$\sum_k Q_k \beta_{rk} = \Pi_r .$$

Damit geht (12) über in:

$$\sum_k \beta_{rk} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \sum \beta_{rk} \frac{\partial L}{\partial q_k} = \Pi_r , \qquad (14)$$

womit die rechte Seite schon die endgültige Form angenommen hat. In $L\ (q_k, \dot{q}_k)$ ersetzen wir nun die Geschwindigkeiten $\dot{q}_k$ durch ihren Ausdruck gemäß der zweiten Gleichung (11), wodurch L in L' übergehen möge. Wir haben also:

$$L\,(q_k, \dot{q}_k) = L'\,(q_k, \dot{\pi}_r) . \qquad (15)$$

Daraus folgt sofort, da L' die $\dot{q}_k$ nur vermittels der $\dot{\pi}_r$ enthält:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \sum_\sigma \frac{\partial L'}{\partial \dot{\pi}_\sigma} \frac{\partial \pi_\sigma}{\partial \dot{q}_k}$$

und das ist nach der zweiten Gleichung (10):

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \sum_\sigma \frac{\partial L'}{\partial \dot{\pi}_\sigma} \alpha_{k\sigma} .$$

Diesen Ausdruck haben wir gemäß (14) nach t zu differentiieren; es folgt:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) = \frac{d}{dt}\left\{\sum_\sigma \frac{\partial L'}{\partial \dot{\pi}_\sigma} \alpha_{k\sigma}\right\} = \sum_\sigma \alpha_{k\sigma} \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{\pi}_\sigma} + \sum_\sigma \frac{\partial L'}{\partial \dot{\pi}_\sigma} \frac{d\alpha_{k\sigma}}{dt} ,$$

und da die $\alpha_{k\sigma}$ von der Zeit nur insofern abhängen, als sie Funktionen von den q_k sind, haben wir weiter, da $\frac{d\alpha_{k\sigma}}{dt} = \sum_\lambda \frac{\partial \alpha_{k\sigma}}{\partial q_\lambda} \dot{q}_\lambda$ ist:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) = \sum_\sigma \alpha_{k\sigma} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{\pi}_\sigma}\right) + \sum_\sigma \sum_\lambda \frac{\partial L'}{\partial \dot{\pi}_\sigma} \frac{\partial \alpha_{k\sigma}}{\partial q_\lambda} \dot{q}_\lambda .$$

Damit wird (14):

$$\sum_k \sum_\sigma \beta_{rk} \alpha_{k\sigma} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{\pi}_\sigma}\right) + \sum_k \sum_\sigma \sum_\lambda \beta_{rk} \frac{\partial L'}{\partial \dot{\pi}_\sigma} \frac{\partial \alpha_{k\sigma}}{\partial q_\lambda} \dot{q}_\lambda - \sum_k \beta_{rk} \frac{\partial L}{\partial q_k} = \Pi_r . \qquad (16)$$

Nach bekannten Determinantensätzen ist nun $\sum_k \beta_{rk} \alpha_{k\sigma} = 0$, wenn $\sigma \neq r$, und $= 1$, wenn $\sigma = r$ ist. Also wird (16) einfacher:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{\pi}_r}\right) + \sum_k \sum_\sigma \sum_\lambda \beta_{rk} \frac{\partial L'}{\partial \dot{\pi}_\sigma} \frac{\partial \alpha_{k\sigma}}{\partial q_\lambda} \dot{q}_\lambda - \sum_k \beta_{rk} \frac{\partial L}{\partial q_k} = \Pi_r . \qquad (17)$$

In dieser Gleichung hat auch das erste Glied links bereits die gewünschte Form angenommen. Wenn wir schließlich unter Berücksichtigung von (15) $\frac{\partial L}{\partial q_k}$ bilden, so ist zu beachten, daß L' die die q_k an zwei Stellen enthält, erstens an den Stellen, wo sie auch in L vorkommen, zweitens aber vermöge der $\dot{\pi}_r$, die nach der zweiten Gleichung (10) Funktionen von α_{kr}, also von den q_k sind. Wir haben also:

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = \frac{\partial L'}{\partial q_k} + \sum_\mu \frac{\partial L'}{\partial \dot{\pi}_\mu} \frac{\partial \dot{\pi}_\mu}{\partial q_k} = \frac{\partial L'}{\partial q_k} + \sum_\mu \frac{\partial L'}{\partial \dot{\pi}_\mu} \sum_l \frac{\partial \alpha_{l\mu}}{\partial q_k} \dot{q}_l = \frac{\partial L'}{\partial q_k} + \sum_\mu \sum_l \frac{\partial L'}{\partial \dot{\pi}_\mu} \frac{\partial \alpha_{l\mu}}{\partial q_k} \dot{q}_l . \qquad (18)$$

Eingesetzt in (17) liefert das:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{\pi}_r}\right) - \sum_k \beta_{rk} \frac{\partial L'}{\partial q_k} = \sum_k \sum_\sigma \sum_\lambda \beta_{rk} \frac{\partial L'}{\partial q_\sigma} \frac{\partial \alpha_{k\sigma}}{\partial q_\lambda} \dot{q}_\lambda - \sum_k \sum_\mu \sum_l \beta_{rk} \frac{\partial L'}{\partial \dot{\pi}_\mu} \frac{\partial \alpha_{l\mu}}{\partial q_k} \dot{q}_e = \Pi_r . \qquad (19)$$

Nun ist unter Berücksichtigung der ersten Gleichung (11):

$$\frac{\partial L'}{\partial \pi_r} = \sum_k \frac{\partial L'}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial \pi_r} = \sum_k \frac{\partial L'}{\partial q_k} \beta_{rk} ;$$

also kann (19) geschrieben werden:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{\pi}_r}\right) - \frac{\partial L'}{\partial \pi_r} + \sum_k \sum_\sigma \sum_\lambda \beta_{rk} \frac{\partial L'}{\partial \dot{\pi}_\sigma} \frac{\partial \alpha_{k\sigma}}{\partial q_\lambda} \dot{q}_\lambda - \sum_k \sum_\mu \sum_l \beta_{rk} \frac{\partial L'}{\partial \dot{\pi}_\mu} \frac{\partial \alpha_{l\mu}}{\partial q_k} \dot{q}_l = \Pi_r , \qquad (20)$$

worin nunmehr auch das zweite Glied die vorgeschriebene Form hat; gleichzeitig erkennt man, daß das Auftreten des dritten und vierten Gliedes die Abweichung von den gewöhnlichen Lagrangeschen Gleichungen bedingt. Um den Zusammenhang mit den Integrabilitätsbedingungen (2) in Evidenz zu setzen, kann man, was natürlich stets gestattet ist, die Bezeichnung der Summationsbuchstaben im vierten Gliede so wählen, daß sie mit denen des dritten übereinstimmen, d. h., wir können im vierten Gliede den Buchstaben μ durch σ, den Buchstaben l durch λ ersetzen und finden dann durch geeignete Zusammenfassung:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{\pi}_r}\right) - \frac{\partial L'}{\partial \pi_r} + \sum_k \sum_\sigma \sum_\lambda \beta_{rk} \frac{\partial L'}{\partial \dot{\pi}_\sigma} \left(\frac{\partial \alpha_{k\sigma}}{\partial q_\lambda} - \frac{\partial \alpha_{\lambda\sigma}}{\partial q_k}\right) \dot{q}_\lambda = \Pi_r ,$$

oder endlich, wenn wir nach (11) $\dot{q}_\lambda$ durch $\sum_\varrho \beta_{\varrho\lambda} \dot{\pi}_\varrho$ ersetzen:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{\pi}_r}\right) - \frac{\partial L'}{\partial \pi_r} + \sum_k \sum_\sigma \sum_\lambda \sum_\varrho \beta_{rk} \beta_{\varrho\lambda} \dot{\pi}_\varrho \frac{\partial L'}{\partial \dot{\pi}_r} \left(\frac{\partial \alpha_{k\sigma}}{\partial q_\lambda} - \frac{\partial \alpha_{\lambda\sigma}}{\partial q_k}\right) = \Pi_r , \qquad (21)$$

die das gewünschte Resultat darstellt: Sind die durch (11) definierten $\delta\pi_r$ Differentiale wahrer Koordinaten, so sind die Integrabilitätsbedingungen (2) erfüllt, und (21) reduziert sich auf die gewöhnliche Lagrangesche Gleichung. Sind dagegen die $\delta\pi_r$ Differentiale nichtholonomer Koordinaten, so gibt das dritte Glied der linken Seite von (21) die dann notwendige Korrektion der Lagrangeschen Gleichungen an.

§ 4.

Wenden wir zum Schlusse die Gl. (21) auf das eingangs erwähnte Problem des kräftefreien Kreisels an, wobei wir den Ausdruck (5) für die kinetische Energie zugrunde legen wollen, der jetzt mit L' zu bezeichnen ist, da er als Funktion der $\dot{\pi}_r$ dargestellt ist.

Wir haben dann die vierfache Summe $\sum_k \sum_\sigma \sum_i \sum_\varrho \beta_{rk} \beta_{\varrho i} \dot{\pi}_\varrho \left(\frac{\partial \alpha_{k\sigma}}{\partial q_i} - \frac{\partial \alpha_{i\sigma}}{\partial q_k} \right)$ zu berechnen. Dabei hängt der Ausdruck

$$\sum_k \sum_i \beta_{rk} \beta_{\varrho i} \left(\frac{\partial \alpha_{k\sigma}}{\partial q_i} - \frac{\partial \alpha_{i\sigma}}{\partial q_k} \right) = \gamma_{r\varrho\sigma}$$

nur von dem Zusammenhange zwischen den δq_k und den $\delta \pi_r$ ab; er ist mit den drei Indizes bezeichnet, die in ihm nicht als Summationsbuchstaben auftreten. Alle Indizes laufen von 1 bis 3. Es gibt also je 9 Koeffizienten α_{kr} und β_{rk}, und 27 Koeffizienten $\gamma_{r\varrho\sigma}$. Man findet leicht aus Gl. (3):

$$\left.\begin{array}{lll} \alpha_{11} = \sin\psi \sin\vartheta, & \alpha_{21} = \cos\psi, & \alpha_{31} = 0, \\ \alpha_{12} = \cos\psi \sin\vartheta, & \alpha_{22} = -\sin\psi, & \alpha_{32} = 0, \\ \alpha_{13} = \cos\vartheta, & \alpha_{23} = 0, & \alpha_{33} = 1, \end{array}\right\} \quad (22)$$

sowie:

$$\left.\begin{array}{lll} \beta_{11} = \dfrac{\sin\psi}{\sin\vartheta}, & \beta_{21} = \dfrac{\cos\psi}{\sin\vartheta}, & \beta_{31} = 0, \\ \beta_{12} = \cos\psi, & \beta_{22} = -\sin\psi, & \beta_{32} = 0, \\ \beta_{13} = -\dfrac{\sin\psi\cos\vartheta}{\sin\vartheta}, & \beta_{23} = -\dfrac{\cos\psi\cos\vartheta}{\sin\vartheta}, & \beta_{33} = 1. \end{array}\right\} \quad (23)$$

Die Integrabilitätsbedingungen (2) sind nicht erfüllt, denn man erhält:

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{\partial \alpha_{11}}{\partial\vartheta} - \dfrac{\partial \alpha_{21}}{\partial\varphi} = \sin\psi\cos\vartheta, & \\ \dfrac{\partial \alpha_{11}}{\partial\psi} - \dfrac{\partial \alpha_{31}}{\partial\varphi} = \cos\psi\sin\vartheta, & \\ \dfrac{\partial \alpha_{21}}{\partial\psi} - \dfrac{\partial \alpha_{31}}{\partial\vartheta} = -\sin\psi & \\ \hline \dfrac{\partial \alpha_{12}}{\partial\vartheta} - \dfrac{\partial \alpha_{22}}{\partial\varphi} = \cos\psi\cos\vartheta, & \\ \dfrac{\partial \alpha_{12}}{\partial\psi} - \dfrac{\partial \alpha_{32}}{\partial\varphi} = -\sin\psi\sin\vartheta, & \\ \dfrac{\partial \alpha_{22}}{\partial\psi} - \dfrac{\partial \alpha_{32}}{\partial\vartheta} = -\cos\psi & \\ \hline \dfrac{\partial \alpha_{13}}{\partial\vartheta} - \dfrac{\partial \alpha_{23}}{\partial\varphi} = -\sin\vartheta, & \\ \dfrac{\partial \alpha_{13}}{\partial\psi} - \dfrac{\partial \alpha_{33}}{\partial\varphi} = 0, & \\ \dfrac{\partial \alpha_{23}}{\partial\varphi} - \dfrac{\partial \alpha_{33}}{\partial\vartheta} = 0 & \end{array}\right\} \quad (24)$$

Aus (23) und (24) erhält man in leichter Rechnung die $\gamma_{r\varrho\sigma}$:

$$\left.\begin{array}{llll} \gamma_{111} = 0, & \gamma_{211} = 0, & \gamma_{311} = 0, & \\ \gamma_{121} = 0, & \gamma_{211} = 0, & \gamma_{321} = -1, & \\ \gamma_{131} = 0, & \gamma_{231} = +1, & \gamma_{331} = 0. & \\ \gamma_{112} = 0, & \gamma_{212} = 0, & \gamma_{312} = +1, & \\ \gamma_{122} = 0, & \gamma_{222} = 0, & \gamma_{322} = 0, & \\ \gamma_{132} = -1, & \gamma_{232} = 0, & \gamma_{332} = 0, & \\ \gamma_{113} = 0, & \gamma_{213} = -1, & \gamma_{313} = 0, & \\ \gamma_{123} = +1, & \gamma_{223} = 0, & \gamma_{323} = 0, & \\ \gamma_{133} = 0, & \gamma_{233} = 0, & \gamma_{333} = 0. & \end{array}\right\} \quad (25)$$

Man sieht, daß alle Größen $\gamma_{r\varrho\sigma}$ mit zwei bzw. drei gleichen Indizes verschwinden, während diejenigen mit drei ungleichen Indizes abwechselnd gleich $+1$ oder -1 sind.

Nun sind für jeden Wert von $r = 1, 2, 3$ die neungliedrigen Summen

$$\sum_\sigma \sum_\varrho \dot{\pi}_\varrho \frac{\partial L'}{\partial \dot{\pi}_\sigma} \gamma_{r\varrho\sigma}$$

zu bilden; die einzelnen Summanden sind z. B. für $r = 1$ folgende:

$$\dot{\pi}_1 \frac{\partial L'}{\partial \dot{\pi}_1} \gamma_{111} = 0, \quad \dot{\pi}_2 \frac{\partial L'}{\partial \dot{\pi}_1} \gamma_{121} = 0, \quad \dot{\pi}_3 \frac{\partial L'}{\partial \dot{\pi}_1} \gamma_{131} = 0,$$

$$\dot{\pi}_1 \frac{\partial L'}{\partial \dot{\pi}_2} \gamma_{112} = 0, \quad \dot{\pi}_2 \frac{\partial L'}{\partial \dot{\pi}_2} \gamma_{122} = 0, \quad \dot{\pi}_3 \frac{\partial L'}{\partial \dot{\pi}_2} \gamma_{132} = -\dot{\pi}_3 \frac{\partial L'}{\partial \dot{\pi}_2},$$

$$\dot{\pi}_1 \frac{\partial L'}{\partial \dot{\pi}_3} \gamma_{113} = 0, \quad \dot{\pi}_2 \frac{\partial L'}{\partial \dot{\pi}_3} \gamma_{123} = \dot{\pi}_2 \frac{\partial L'}{\partial \dot{\pi}_3}, \quad \dot{\pi}_3 \frac{\partial L'}{\partial \dot{\pi}_3} \gamma_{133} = 0.$$

Damit wird für $r = 1$, d. h. für die erste Eulersche Gleichung, die zu berechnende vierfache Summe einfach gleich:

$$\dot{\pi}_2 \frac{\partial L'}{\partial \dot{\pi}_3} - \dot{\pi}_3 \frac{\partial L'}{\partial \dot{\pi}_2},$$

und wir erhalten, wenn wir wegen der vorausgesetzten — übrigens offenbar durchaus unwesentlichen — Kräftefreiheit $\Pi_1 = 0$ setzen, aus (21):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{\pi}_1}\right) - \frac{\partial L'}{\partial \pi_1} + \dot{\pi}_2 \frac{\partial L'}{\partial \dot{\pi}_3} - \dot{\pi}_3 \frac{\partial L'}{\partial \dot{\pi}_2} = 0, \quad (26)$$

woraus die beiden andern durch zyklische Ver-

tauschung der Indizes 1, 2, 3 folgen. Da $\frac{\partial L'}{\partial \pi_1} = 0$, ist jetzt in der Tat richtig:

$$A\frac{d\dot{\vec{x}}}{dt} + (C-B)\,\dot{\vec{\chi}}\,\dot{\vec{\varrho}} = 0,$$

und zwei entsprechende.

Die Gleichung (26) hat genau die Form, in der sie auch Kirchhoff erhält.

Breslau, im Februar 1918.

(Eingegangen 9. Februar 1918.)

Die linearen Dimensionen der Dichteschwankungen.

Von L. S. Ornstein und F. Zernike.

Vor kurzem hat Herr v. Laue in dieser Zeitschrift[1]) einen Aufsatz „Temperatur und Dichteschwankungen" veröffentlicht, in welchem sich am Schluß folgende Bemerkung findet: ... „es ist eine völlige Verkennung des Sachverhalts, wenn sich in der Literatur der Wunsch nach einer Berechnung der linearen Dimensionen der Dichteschwankungen findet." Da wir diese Berechnung schon in früheren, offenbar noch wenig bekannten, Arbeiten[2]) angegeben haben, scheint es uns nützlich an dieser Stelle eine Übersicht unserer theoretischen Betrachtungen und eine abgekürzte Herleitung unserer Formeln zu geben.

Es herrsche in einer Flüssigkeit in irgendeinem Volumelement eine Dichte, die zufällig größer als die mittlere ist. Die gegenseitige Anziehung der Moleküle wird dann in der unmittelbaren Umgebung eine größere Dichte als die mittlere begünstigen, und zwar bis in eine Entfernung gleich dem Wirkungsradius. In dieser Umgebung wird eine positive Dichteabweichung also wahrscheinlicher sein, als eine negative, d. h. es besteht eine Korrelation im Sinne der Wahrscheinlichkeitsrechnung zwischen den Dichteschwankungen in Volumelementen, die innerhalb ihrer gegenseitigen Wirkungssphäre liegen.

Der Einfluß erstreckt sich aber noch weiter, indem die wahrscheinlich positive Abweichung der genannten Umgebung des Volumelements wieder in derselben Weise eine neue Umgebung beeinflußt, und diese eine noch weitere, usw. Es gibt also auch eine indirekte Beeinflussung der Dichteabweichungen, die mit der Entfernung zwar abnehmen wird, sich aber sehr viel weiter als der Wirkungsradius erstrecken kann. Letzteres wird ganz besonders der Fall sein in der Nähe des kritischen Zustandes, weil dann bekanntlich schon geringe Kräfte einen großen Einfluß auf die Dichte gewinnen. Durch unsere Rechnungen haben wir dieses qualitative Resultat genau bestätigen können.

Man wird nun fragen, woher es kommt, daß eine solche Abhängigkeit der Schwankungen in Einsteins Arbeit[1]) und in den Arbeiten, die sich daran anschließen (Frank, Fürth, v. Laue), nicht zutage tritt. Die genannten Arbeiten benutzen das Boltzmannsche Prinzip, um aus der Entropie die Wahrscheinlichkeit zu berechnen. Dabei wird die Gesamtentropie thermodynamisch berechnet unter der Voraussetzung, daß dieselbe sich additiv aus den Entropien der Volumelemente zusammensetzt. Es ist aber einleuchtend, daß dieser Ansatz die Unabhängigkeit der Schwankungswahrscheinlichkeiten der verschiedenen Volumelemente voraussetzt. Nach unseren Arbeiten gilt eine solche Unabhängigkeit aber nur für Volumelemente, die groß gegen die Dimensionen der Dichteschwankungen sind.

Es ist bei Einsteins Anwendung des Boltzmannschen Prinzips wohl kaum möglich, eine Nichtadditivität der Teilentropien zu berücksichtigen. Allein die Gibbssche Methode der kanonischen Gesamtheiten hat uns in den Stand gesetzt, gleichzeitig mit dem Gesetz der Dichteschwankungen die Entropie aufzufinden[2]).

Obige Wahrscheinlichkeitsüberlegungen sollen jetzt unter Formeln gebracht werden. Es befinde sich ein Überschuß an Substanz dm in irgendeinem Punkte, den wir zum Ursprung der Koordinaten wählen. In einem nahen Punkt $(x\,y\,z)$ wird die direkte Einwirkung von dm eine mittlere Dichte $s + \sigma$ verursachen, wo s die allgemeine mittlere Dichte, σ die mittlere Abweichung vorstelle. σ wird proportional dm und eine Funktion der Entfernung sein. Wir setzen $\sigma = f(x\,y\,z)\,dm$. Man kann sich dabei eine indirekte Einwirkung etwa dadurch beseitigt denken, daß man in allen übrigen Punkten eine Dichte gleich s vorschreibt. Aber auch wenn abweichende Dichten in der Umgebung vorgeschrieben sind, wird man die Funktion f gebrauchen.

Es seien einmal überall um einen willkürlichen Ursprung die Dichteabweichungen $\sigma(x\,y\,z)$ bekannt, und die mittlere Abweichung σ_0 im

1) Diese Zeitschr. 18, 542, 1917.

2) L. S. Ornstein und F. Zernike, „Accidental deviations of density and opalescence at the critical point of a single substance". Amsterdam Proceedings 17, 793, 1914. Zitiert als A. F. Zernike, „The clustering-tendency of the molecules in the critical state and the extinction of light caused thereby". Amsterdam Proc. 18, 1520, 1916. Zitiert als B.

1) A. Einstein, Ann. d. Phys. (4) 33, 1285, 1910.

2) A., § 3.

Ursprung daraus zu bestimmen. Im Volumelement $dx\,dy\,dz$ findet sich ein Überschuß $\sigma dx\,dy\,dz$ und dieser bewirkt im Ursprung eine mittlere Abweichung $f(xyz)\,\sigma\,dx\,dy\,dz$. Die ganze Umgebung ergibt also

$$\sigma_0 = \int f(xyz)\,\sigma(xyz)\,dx\,dy\,dz. \qquad (1)$$

Ihrer Bedeutung nach ist die Funktion f nur innerhalb der Wirkungssphäre von Null verschieden, und hängt direkt mit den molekularen Anziehungskräften zusammen.

Jetzt betrachten wir von neuem einen Überschuß dm im Ursprung, schließen aber die indirekte Wirkung nicht aus. Die mittlere Dichte im Punkt (xyz) werden wir jetzt durch $s + f\,g(xyz)\,dm$ darstellen. Man hat die Funktion g zu benutzen, wenn die Dichte in der Umgebung unbekannt ist. Berechnen wir zum Beispiel den Mittelwert des Produkts $\sigma_0 \cdot \sigma(xyz)$ wo σ_0 im Volumelement $d\tau_0$, σ in $d\tau$ gelte, welche Elemente klein im Vergleich zur Wirkungssphäre sind. Für jeden bestimmten Wert von σ_0 ist:

$$\overline{\sigma} = g(xyz)\,\sigma_0\,d\tau_0$$

also

$$\overline{\sigma_0\sigma} = g(xyz)\,\overline{\sigma_0^2}\,d\tau_0.$$

Aber auch umgekehrt

$$\overline{\sigma_0\sigma} = g(xyz)\,\overline{\sigma^2}\,d\tau.$$

Aus beiden Gleichungen folgt, daß $\overline{\sigma^2}\,d\tau$ unabhängig von der Größe des kleinen Volumelements $d\tau$ sein muß, so daß wir es gleich a setzen können, einer Größe, die nur von dem molaren Zustand der Flüssigkeit abhängt[1]). Die Korrelation der Dichteabweichungen wird also durch g bestimmt nach der Gleichung

$$\overline{\sigma_0\sigma} = a\,g(xyz). \qquad (2)$$

Wir leiten jetzt eine Differentialgleichung für g ab, wodurch diese Funktion berechnet werden kann, wenn die Funktion f bekannt ist[2]).

Wir bestimmen durch $(x+x', y+y', z+z')$ einen Punkt innerhalb der Wirkungssphäre um (xyz) und denken uns den Ursprung mit der Abweichung dm viel weiter entfernt. In diesem Punkt ist die mittlere Schwankung der Dichte gleich

$$\sigma = g(x+x', y+y', z+z')\,dm = dm\Big\{g(xyz) + \frac{\partial g}{\partial x}x' + \frac{\partial g}{\partial y}y' + \frac{\partial g}{\partial z}z' + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}x'^2 + \frac{\partial^2 g}{\partial x\,\partial y}x'y' + \text{usw.}\Big\}.$$

Auf die Umgebung des Punktes (xyz) wenden wir nun Gleichung (1) an:

$$g(xyz)\,dm = \int f(x'y'z')\,\sigma\cdot dx'\,dy'\,dz'.$$

Führt man hier den Wert von σ ein, so können g und seine Ableitungen vor das Integralzeichen gebracht werden. Beachtet man weiter, daß f nur eine Funktion des Radiusvektors $\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}$ sein kann, so erhält man, wenn man bedenkt, daß wie man leicht einsieht,

$$\int x f\,d\tau = 0$$

und

$$\int x^2 f\,d\tau = \frac{1}{3}\int r^2 f\,d\tau$$

ist,

$$g(xyz) = g(xyz)\int f\,d\tau + \frac{1}{6}\triangle g\int z^2 f\,d\tau.$$

Oder wenn wir die Integrale respektive mit F und ε^2 bezeichnen:

$$\triangle g - \frac{6(1-F)}{\varepsilon^2}\,g = 0.$$

Über die Bedeutung der Größen F und ε sei hier schon gleich bemerkt, daß $F = 1$ einen Grenzwert darstellt, der im kritischen Punkt erreicht wird[1]), während sonst $F < 1$, und daß das Verhältnis ε^2/F das Quadrat einer Art „mittlerer Reichweite der Funktion F" angibt. Für Betrachtungen, welche sich auf die kritische Gegend beziehen, wird man also ε selbst mit dieser Reichweite oder dem „mittleren Wirkungsradius" identifizieren können.

Die Lösung der Differentialgleichung, die im Unendlichen verschwindet, ist:

$$g = A\,r^{-1}\,e^{-kr},$$

wenn

$$\varkappa^2 = \frac{6(1-F)}{\varepsilon^2}.$$

Hiermit ist g außerhalb der Wirkungssphäre bis auf einen konstanten Faktor, der für das Folgende ohne Belang ist, bestimmt[2]). Für die mittlere Reichweite von g wird man

1) Unter gewissen Einschränkungen kann man zeigen, daß $a = \frac{s}{N}$ ist. Man vgl. A, Gleichung (9). Der Wert von a ist übrigens für das Folgende ohne Bedeutung (N Avogadrosche Zahl).

2) Die Integralgleichung, die in voller Strenge den Zusammenhang von f und g angibt, haben wir in A hergeleitet und diskutiert. Zur expliziten Berechnung von g wurde sie in B näherungsweise in die hier gegebene Differentialgleichung verwandelt.

1) L. S. Ornstein, The clustering tendency of the molecules at the critical point. Proc. Amsterdam **19**, 1321, 1916. Vgl. L. S. Ornstein und F. Zernike, The influence of accidental deviations of density on the equation of state. Proc. Amsterdam **19**, 1312, 1916.

2) In B wurde dieser Faktor bestimmt zu $3F/2\pi\varepsilon^2$. Diesen Wert benutzen wir im folgenden, weil die Formeln sich dadurch vereinfachen. So wird damit $\int g\,d\tau = F/1-F$, wie auch in A aus der Integralgleichung gefunden wurde.

$$\gamma = \frac{\sqrt{\sigma}}{\varkappa} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1-F}}$$

finden.

Weiter führen wir analog F für das Integral über g ein:

$$G = \int g\, d\tau = \int_0^\infty 4\pi r^2 g(r)\, dr = \frac{2\pi}{3}\,\frac{\varepsilon^2}{1-F}.$$

Auch die mittlere Dichteschwankung in einem gegebenen Volumen V können wir jetzt berechnen. Die Schwankung selbst ist

$$\Sigma = \frac{1}{V}\int_V \sigma\, d\tau,$$

und das mittlere Quadrat also

$$\overline{\Sigma^2} = \frac{1}{V^2}\int_V \overline{\sigma^2}\, d\tau\, d\tau' + \frac{1}{V^2}\int_V\int_V \overline{\sigma\sigma'}\, d\tau\, d\tau'.$$

Die erste Form ist gleich a/V; in der zweiten wird man (2) anwenden. Es ist leicht zu ersehen, daß für ein großes Volumen annähernd gefunden wird

$$\overline{\Sigma^2} = \frac{a}{V}(1+G) = \frac{a}{V}\,\frac{1}{1-F}.$$

Für ein nicht so großes Volumen werden wir zur Durchführung der Berechnung eine bestimmte Gestalt wählen müssen, z. B. eine Kugel mit Radius R. Wir finden für diesen Fall unter der Voraussetzung $R \gg \varepsilon$ (sonst würde der Verlauf der Funktion f eingehen)

$$\overline{\Sigma^2} = \frac{a}{V^2}\Big[\frac{V}{1-F} - \frac{24\pi F}{\varepsilon^2\varkappa^5}\big((\varkappa R+1)\, e^{-\varkappa R}(\varkappa R\,\mathrm{Cosh}\,\varkappa R - \mathrm{Sinh}\,\varkappa R)\big)\Big].$$

Dieser etwas verwickelte Ausdruck zeigt einen einfachen Verlauf. Der letzte nur von $\varkappa R$ abhängige Teil ist nämlich für $\varkappa R \gg 1$ gleich $\frac{1}{2}(\varkappa R)^2$, für $\varkappa R \ll 1$ gleich $\frac{1}{3}(\varkappa R^3 - \frac{2}{15}(\varkappa R)^5$.

Diese asymptotischen Werte kann man mit guter Annäherung für $\varkappa R > 1$, bzw. $\varkappa R < \frac{1}{2}$ benutzen. Das mittlere Schwankungsquadrat wird, für $\varkappa R > 1$ $(R > \frac{1}{2}\gamma)$

$$\overline{\Sigma^2} = \frac{a}{V^2}\Big[\frac{V}{1-F} - \frac{F}{1-F}\cdot\frac{O}{2\varkappa}\Big], \qquad (3)$$

wo O die Oberfläche der Kugel ist. Man kann leicht zeigen, daß obige Formel auch für ein willkürlich gestaltetes großes Volumen die zweite Näherung darstellt.

Für $\varkappa R < \frac{1}{2}\left(R < \frac{1}{5}\gamma\right)$ wird

$$\overline{\Sigma^2} = \frac{a}{V^2}\Big[V + \frac{16\pi F}{5\varepsilon^2}R^5\Big]. \qquad (4)$$

Hierin überwiegt das zweite Glied, solange $R \gg \varepsilon$ ist. Selbst für $R \ll \varepsilon$ ist diese Formel richtig, liefert nämlich $\frac{a}{V} = \overline{\Sigma^2}$. Unsere Betrachtungen gelten aber für den Fall $R \gg \varepsilon$. Für diesen Fall aber wird $\overline{\Sigma^2}$ umgekehrt proportional R, nimmt also mit abnehmender Größe des betrachteten Volums weit langsamer zu als für größere Volume. Aus (3) und (4) sieht man, daß die Proportionalität von $\overline{\Sigma^2}$ und $1/V$ gänzlich aufhört, wenn die Dimensionen von V mit γ vergleichbar werden. (Für $R = \gamma$ hat $\overline{\Sigma^2}$ nur die Hälfte des daraus berechneten Wertes.) Das Abweichen von dieser Proportionalität wäre ohne Korrelation unmöglich. Die Länge γ kann als ein Maß für die linearen Dimensionen der Dichteschwankungen aufgefaßt werden. Es ist wichtig zu bemerken, daß in diesen Formeln $\varkappa$ nicht mehr auftritt. Der Wert von $\overline{\Sigma^2}$ ist daher unabhängig von der Entfernung vom kritischen Punkt. Aber das Volumen, auf welches es gestattet ist, die Formel anzuwenden, wächst bei Annäherung an den kritischen Punkt.

Übrigens sind die Dichteschwankungen so wechselnder Natur, daß es gefährlich ist damit eine Vorstellung einer bestimmten Dimension zu verbinden. Man meine also nicht etwa, daß sie Schwärme von der Größe γ oder von bestimmter Struktur bilden. Jedoch hat die Größe γ einen beobachtbaren physikalischen Sinn, wie z. B. aus unserer Theorie der Opaleszenz in unmittelbarer Nähe des kritischen Punktes hervortritt. Wir fanden nämlich, daß die bekannte Opaleszenzformel durch

$$1 + \frac{8\pi^2\gamma^2}{3\mu^2\lambda^2}$$

zu dividieren ist, wie es auch für Teilchen einer bestimmten Größe der Fall wäre. (μ Brechungsindex, λ Wellenlänge.) Dadurch wird die Opaleszenz um die Hälfte verkleinert, wenn $\gamma = 0{,}2\,\lambda$ ist, und wird im kritischen Punkt proportional λ^{-2}, aber nicht unendlich groß. —

Es erübrigt sich, die eingeführten Größen ε und F mit meßbaren Größen in Beziehung zu setzen. Die Gibbssche statistische Mechanik würde das ohne weiteres leisten. In unserem Falle braucht man nur eines der Resultate obiger Betrachtungen mit einer auf anderem Wege gefundenen Formel zu vergleichen. Natürlich wird man dazu Gleichungen (4) wählen, weil die frü-

heren Herleitungen für genügend große Volumina ihre Gültigkeit behalten. Also

$$\overline{\Delta^2 V} = \frac{a}{1-F} = -\frac{RT}{N}\frac{1}{v^3}\frac{dp}{dv}$$

und mit $\frac{s}{N} = \frac{1}{VN}$:

$$1 - F = -\frac{V^2}{RT}\frac{dp}{dv}, \quad \gamma = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1-F}}.$$

Eine Vorstellung über wirkliche Werte von $1-F$ bekommt man in einfacher Weise mittels der van der Waalsschen Gleichung. Diese gibt für die kritische Dichte:

$$1 - F = \frac{9}{4}\frac{T - T_k}{T}.$$

Z. B. ist für $T_k = 300$ die Größe $1-F$ gleich 0,01 bei 1,3 oberhalb der kritischen Temperatur, gleich 10^{-4}; bei 0,013 Grad, die Länge γ bzw. gleich 10 und 100 Wirkungsradien.

Die Anwendung des Boltzmannschen Prinzips muß beschränkt werden auf Volumelemente, deren Dimensionen groß gegen γ sind. Im kritischen Punkt ist das unmöglich. Es ist also eine völlige Verkennung des Sachverhalts, wenn man den unendlichen Wert der Dichteschwankungen im kritischen Punkt, den die frühere Formel ergibt, dadurch zu verbessern sucht, daß man in der Entwicklung der Entropie höhere Glieder berücksichtigt.

Instituut voor Theoretische Physica der Universiteit Utrecht. Jan. 1918.
Groningen.

(Eingegangen 6. Februar 1918.)

Adiabatenhypothese und Boltzmannsches Prinzip.

Von Adolf Smekal.

Die Beziehungen der Adiabatenhypothese zu den statistischen Grundlagen des II. Hauptsatzes der Thermodynamik konnten von Ehrenfest[1]) bisher nur für Gesamtheiten von Molekülen mit einem Freiheitsgrade aufgedeckt werden. Im folgenden wird nun gezeigt, daß die Annahme adiabatisch-invarianter Quantenansätze auch bei Gesamtheiten stabiler Systeme beliebig vieler Freiheitsgrade für die Gültigkeit des Boltzmannschen Prinzips notwendig und hinreichend ist.

1) P. Ehrenfest, Ann. d. Phys. **51**, 327, 1916 (zitiert als II).

§ 1. Die Bedingung dafür, daß das Boltzmannsche Prinzip bei der allgemeinen (zunächst noch stetigen) Gewichtswahl

$$G(q, p, a)$$

im μ-Raum (Phasenraum des Moleküls, allgemeiner des Teilsystems) richtig ist, wurde von Ehrenfest[1]) in der Form

$$\int d\tau e^{-\frac{\varepsilon}{\Theta}} \delta G = 0 \qquad (1)$$

angegeben. Dabei bedeutet

$$d\tau = dq_1 \ldots\ldots dp_r \qquad (2)$$

das Phasenelement des $2r$-dimensionalen μ-Raumes, ε die Energie eines der gleichbeschaffenen Teilsysteme, Θ eine Konstante (das Temperaturanalogon) und

$$\delta G(q, p, a) = \sum \frac{\partial G}{\partial a}\delta a .$$

Da die Parameter a und ihre Verschiebungen voneinander völlig unabhängig sein sollen, kann man (1) auch durch die Gleichung

$$\int d\tau e^{-\frac{\varepsilon}{\Theta}} \frac{\partial G}{\partial a} = 0 \qquad (3)$$

ersetzen, die nun für alle a erfüllt sein muß. Die vorkommenden Integrationen sind über den ganzen unendlichen μ-Raum zu erstrecken.

Der Ehrenfestschen Überlegung liegt die stillschweigend gemachte, aber doch sehr wesentliche Voraussetzung zugrunde, daß das ebenfalls über den ganzen unendlichen μ-Raum erstreckte Integral („Zustandsintegral")

$$Z = \int d\tau e^{-\frac{\varepsilon}{\Theta}} G \qquad (4)$$

einen endlichen Wert besitzt. Wenn G, wie im folgenden festgehalten werden soll, für unendlich große Phasen p, q nicht unendlich von unendlich hoher Ordnung wird, so ist dies nur möglich, wenn alle jene Systeme ausgeschlossen werden, deren Energie für unendliche Phasen endlich bleibt oder gegen Null konvergiert. Die Ehrenfestschen Resultate sind also unmittelbar nur auf Systeme anwendbar, deren Energieflächen im μ-Raum endlich und geschlossen sind.

Um auch die übrigen, weitaus zahlreicheren stabilen Systeme in den Kreis der Betrachtung ziehen zu können, ist es nötig, den μ-Raum durch gewisse Bedingungsungleichungen abzugrenzen, wozu der übrigens stets vorhandene

1) P. Ehrenfest, diese Zeitschr. 15, 657, 1914 (zitiert als I); § 2, Gl. (35a). An Stelle von Θ wird dort $\frac{1}{\mu}$ geschrieben.

Einfluß von Gefäßwänden und Nachbarsystemen[1]) heranzuziehen ist. Wenn man, wie dies bei den Anwendungen des Boltzmannschen Prinzips gewöhnlich der Fall ist, die translatorische Bewegung außer acht läßt und sich auf die Betrachtung der „inneren" Freiheitsgrade der Teilsysteme beschränkt[2]), so wird man auch wieder mit praktisch völlig ausreichender Annäherung voraussetzen können, daß die Bewegung, die diesen „inneren" Freiheitsgraden angehört, an den erwähnten Grenzen des μ-Raumes keine Störung erleidet. Die Bedingungsungleichungen werden dann also Beschränkungen für die Werte der willkürlichen Konstanten gewisser zeitfreier Integrale der Teilsysteme darstellen, wenn auch die Wechselwirkung der Teilsysteme nur die Werte dieser willkürlichen Konstanten beeinflußt.

Diese letztere Annahme würde erlauben, die Bedingungsungleichungen als Positiv-Unendlichwerden der potentiellen Energie aufzufassen, wie dies sonst in der statistischen Mechanik üblich ist[3]). Im Hinblick auf die erwähnte Beschränkung auf „innere" Freiheitsgrade wird man aber diese Grenzen vorteilhafter durch Nullsetzen der Gewichtsfunktion charakterisieren, wodurch zugleich das Verschwinden aller jener Glieder erreicht wird, die bei einer beliebigen reversiblen Beeinflussung der Gesamtheit der Teilsysteme aus der Abhängigkeit des Integrales (4) von seinen Grenzen resultieren. Wie man nämlich unmittelbar aus der Anwendung der Gibbsschen Betrachtungsweise auf die von Ehrenfest zugrunde gelegte „wahrscheinlichste" Verteilung[4]) ersehen kann, muß im Falle endlicher Grenzen des μ-Raumes außer der Ehrenfestschen Bedingung (3) auch das Verschwinden dieser Glieder gefordert werden, wenn das Boltzmannsche Prinzip richtig sein soll. Bei der Quantentheorie kommen diese Glieder aber ganz von selbst nicht in Frage, weil sich zeigen wird, daß sich die Konstanten der dort zur Begrenzung verwendeten zeitfreien Integrale einer infinitesimalen reversiblen Beeinflussung gegenüber überhaupt invariant verhalten.

Es bleibt also auch im allgemeineren Falle ungeschlossener Energieflächen nur die Ehrenfestsche Bedingung (3) zu diskutieren übrig.

1) Der Einfluß der Nachbarsysteme, bzw. der der Veränderlichkeit der Dichte, wird bereits bei N. Bohr, Phil. Mag. **26**, 1, 1913; K. F. Herzfeld, Ann. d. Phys. **51**, 261, 1916 und A. Sommerfeld, Münchn. Ber. 1917, S. 83 berücksichtigt.

2) Diese Annahme wird natürlich auch schon bei Ehrenfest zugrunde gelegt.

3) Vgl. z. B. P. Hertz, S. Buch „Statistische Mechanik" in Weber-Gans, Repertorium der Physik, Bd. I, 2, Leipzig 1916, S. 447, Anm. 1.

4) Vgl. A. Smekal, diese Zeitschr. **19**, 7, 1918.

§ 2. Es werde nun zunächst angenommen, daß die der Energiegleichung eines Teilsystems von r „inneren" Freiheitsgraden im μ-Raume entsprechende $(2r-1)$-dimensionale Hyperfläche endlich, geschlossen und singularitätenfrei ist; dann ist es nach dem Obigen noch möglich, über den ganzen unendlichen μ-Raum zu integrieren. Unter diesen Bedingungen existiert auch die der Energiefunktion der Teilsysteme zugehörige mikrokanonische Verteilung sowie die zu ihr und zu einem beliebigen Modul Θ gehörige kanonische Verteilung.

Offenbar kann man (3), abgesehen von dem konstanten endlichen Faktor $(\int e^{-\frac{\varepsilon}{\Theta}} d\tau)^{-1}$, als Mittelwert der Größe $\frac{\partial G}{\partial a}$ in einer kanonischen Gesamtheit auffassen[1]). Wie Gibbs mehrfach hervorhebt, kann man sich eine kanonische Gesamtheit vorstellen als zusammengesetzt aus unendlich vielen mikrokanonischen Gesamtheiten verschiedener Energien. Es besteht somit der Satz: Wenn der Mittelwert einer Phasenfunktion in allen mikrokanonischen Gesamtheiten verschwindet, so verschwindet er auch in allen kanonischen Gesamtheiten[2]). Das Verschwinden des mikrokanonischen Mittelwertes von $\frac{\partial G}{\partial a}$ ist daher hinreichend für das Erfülltsein der Bedingung (3) für die Gültigkeit des Boltzmannschen Prinzips; aus einem von Ehrenfest angeführten Hilfssatze[3]) schließt man, daß es dafür auch notwendig ist. Es stellt nichts anderes dar als die Ehrenfestsche „∂G-Bedingung", genommen zwischen infinitesimal benachbarten Energiegrenzen. —

Damit die von Ehrenfest berechnete „wahrscheinlichste" Verteilung stationär ist, muß G eine Funktion zeitfreier Integrale des Teilsystems, also selbst ein zeitfreies Integral sein. Man kann daher für G eine adiabatische Invariante annehmen. Nun ist die Bedingung dafür, daß ein zeitfreies Integral G adiabatisch-invariant ist durch

1) Prof. Ehrenfest reserviert die Bezeichnungen „mikrokanonische" und „kanonische" Gesamtheit für den γ-Raum. Indessen unterscheiden sich die beiden Räume formal nur durch die Größenordnung ihrer Dimensionszahlen.

2) Daraus folgt z. B., daß die kanonischen Mittelwerte der Koordinaten- und Impulsgeschwindigkeiten Null sind, weil dies für die entsprechenden mikrokanonischen Mittelwerte der Fall ist; vgl. A. Smekal, Wien. Ber. **126**, (IIa), § 2, 1917. Vielleicht läßt sich der oben ausgesprochene Satz noch in folgender Form verallgemeinern: Wenn ein kanonischer Mittelwert vom Modul unabhängig ist, so ist er gleich dem entsprechenden mikrokanonischen Mittelwerte.

3) P. Ehrenfest, I, § 3, Anm. 2 auf S. 659.

$$\overline{\frac{\partial G}{\partial a}} = 0 \qquad (5)$$

gegeben[1]), wenn G darin (wie in § 1) als Funktion der q, p und a angesehen wird und diese Gleichung für alle a Gültigkeit besitzt. Für stabile Systeme, die im folgenden allein in Frage kommen sollen, kann für den in (5) auftretenden Mittelwert auf Grund des Poincaré-Carathéodoryschen Wiederkehrsatzes der Zeitmittelwert angenommen werden; dies trifft also insbesondere auch für jene Systeme zu, deren Energiefunktion eine mikrokanonische Verteilung zugeordnet werden kann.

Nun ist der Zeitmittelwert einer Phasenfunktion gleich dem Mittelwert über alle Punkte der auf der Energiefläche liegenden Phasenbahn des Teilsystems; der mikrokanonische Mittelwert umfaßt aber nicht nur diese Punkte, sondern auch alle $(2r-2)$-fach unendlich vielen Phasenbahnen der Energiefläche, d. h. alle Punkte der Energiefläche. Der mikrokanonische Mittelwert des Zeitmittelwertes einer Phasenfunktion ist daher gleich dem mikrokanonischen Mittelwerte der Phasenfunktion selbst[2]).

Daraus und aus dem Obigen ergibt sich also, daß die adiabatische Invarianz von G (5), für das Verschwinden des mikrokanonischen Mittelwertes von $\frac{\partial G}{\partial a}$ und daher auch für das Erfülltsein der Bedingung (3) hinreichend ist.

Wenn die Energiefläche der betrachteten Teilsysteme nicht geschlossen ist, wird wie oben vorausgesetzt, daß das Einzelsystem entweder stets stabil ist, oder daß man seine Anfangsbedingungen, d. h. die Werte der willkürlichen Konstanten seiner zeitfreien Integrale nur so wählt, daß sie Stabilität zur Folge haben, wie dies z. B. beim n-Körperproblem möglich ist. Dann werden sich die obigen Schlüsse unverändert wiederholen lassen[3]), wenn die Grenzen des μ-Raumes (vgl. § 1) nur solche stabile Lösungen umschließen und sich in den durch sie aus den Energieflächen herausgeschnittenen Bereichen keine singulären Punkte vorfinden, in denen sich zwei Bahnkurven schneiden könnten.

§ 3. Der Reduktion der Bedingung (3), auf die Forderung nach dem Verschwinden eines Energieflächen-Mittelwertes von $\frac{\partial G}{\partial a}$, entspricht physikalisch die Bedingung, daß das erhaltene Resultat für alle Temperaturen, also für alle Werte von θ richtig sein muß[1]). In ähnlicher Weise läßt sich durch Berücksichtigung der Veränderlichkeit von Dichte oder Volumen die schon als hinreichend erkannte Bedingung (5) als notwendig erweisen.

Infolge der stets vorhandenen Gefäßwände und Nachbarsysteme hat man in Wirklichkeit auch im Falle geschlossener Energieflächen nur einen endlich begrenzten Teil des μ-Raumes zu betrachten. Durch Veränderung des Volumens oder der Dichte kann man den (realen) mittleren Abstand zweier Nachbarsysteme und dadurch jenen Raum verändern, der zu ihrer Ausbildung und ungestörten „inneren" Bewegung zur Verfügung steht; dem entspricht eine Änderung der willkürlichen Konstanten der das μ-Raum-Volumen begrenzenden zeitfreien Integrale und somit eine Änderung der Zahl der darin enthaltenen Phasenbahnen, während die Gültigkeit des Boltzmannschen Prinzips und daher auch der für (3) notwendigen Bedingung davon unberührt bleiben muß. Diese Bedingung kann also nicht das Verschwinden des Mittelwertes von $\frac{\partial G}{\partial a}$ über ein bestimmt definiertes Kontinuum von Phasenbahnen sein, sondern muß für jede beliebige Zusammenfassung von Phasenbahnen gelten. Das Verschwinden des Mittelwertes von $\frac{\partial G}{\partial a}$ über jede einzelne Phasenbahn, d. h. das Verschwinden des Zeitmittelwerts (5) ist daher auch notwendig für das Erfülltsein von (3), bei offen gelassenen endlichen Grenzen. Bei der Quantentheorie, wo innerhalb eines endlichen μ-Raum-Volumens überhaupt nur eine endliche Zahl diskreter Systemzustände möglich ist, ist dieses Resultat jetzt unmittelbar evident.

§ 4. Für periodische und bedingt periodische Teilsysteme läßt sich die hinreichende Eigenschaft der Bedingung (5) auch ohne Benutzung der Zusammenhänge zwischen den drei fundamentalen Gesamtheiten der Statistik: Zeitgesamtheit, mikrokanonischer und kanonischer Gesamtheit, dartun.

Wie Burgers gezeigt hat[2]), läßt sich der Zeitmittelwert einer beliebigen Phasenfunktion u eines „nicht entarteten", bedingt periodischen Systems durch den Mittelwert über eine „Periodenzelle" des Systems ersetzen. Bezeichnet man nämlich die Konstanten der beiden Gruppen

1) Vgl. J. M. Burgers, Versl. Amsterdam, 25. Nov. 1916, S. 849, Gl. (6). Ann. d. Phys. **52**, 193, 1917.

2) Dieser Satz ist implizite bereits bei J. Kroo, Bull. Acad. Cracovie 1913, S. 418, in § 4, Gl. (29') enthalten.

3) Bis auf die „Notwendigkeit" der Bedingung, daß der Energieflächen-Mittelwert von $\frac{\partial G}{\partial a}$ verschwinden soll.

1) θ ist nämlich das Temperaturanalogon in der Ehrenfestschen „wahrscheinlichsten" stationären Gesamtheit, und zwar dann und nur dann, wenn das Boltzmannsche Prinzip gilt.

2) J. M. Burgers, l. c. Gl. (20).

der Integrale des bedingt periodischen Systems in der „Hamiltonschen Form" mit $\alpha_1 = \varepsilon$, $\alpha_2, \ldots \ldots \alpha_r, \beta_1 = t - t_0, \beta_2, \ldots \ldots \beta_r$, so sind die Phasen q, p r-fach periodische Funktionen der β und der Zeitmittelwert u erscheint in der Form

$$u = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} u \, dt \, d\beta_2 \ldots \ldots d\beta_r ,$$

wobei die Integration über das Volumen Ω einer Periodenzelle zu erstrecken ist.

Die Bedingung dafür, daß G eine adiabatische Invariante ist (5), läßt sich also hier in der Form schreiben

$$\int_{\Omega} \frac{\partial G}{\partial a} \, dt \, d\beta_2 \ldots \ldots d\beta_r = 0 . \qquad (6)$$

Führt man nun auch in (3) an Stelle der q, p die Integrale in der Hamiltonschen Form ein, so folgt auf Grund eines Satzes von Hasenöhrl[1]) für $d\tau$ (2)

$$d\tau = \pm \, da_1 \ldots da_r \, dt \, d\beta_2 \ldots \ldots d\beta_r$$

und daher für die Bedingung (3)

$$\int e^{-\frac{\alpha_1}{\Theta}} \frac{\partial G}{\partial a} \, da_1 \ldots da_r \, dt \, d\beta_2 \ldots \ldots d\beta_r = 0 . \qquad (7)$$

Da die Integration über jeden die Bedingungsungleichungen befriedigenden Punkt des μ-Raumes nur einmal zu erstrecken ist, hat man wegen der r-fachen Periodizität der q und p nach $dt \, d\beta_2 \ldots d\beta_r$ nur über eine Periodenzelle zu integrieren, während die Integration nach den α bis an die Grenzen des μ-Raumes zu erfolgen hat, die hier allein von Funktionen der α-Integrale gebildet werden. Die Gleichung (7) ist also nach (6) für jede adiabatisch-invariante Gewichtsfunktion G erfüllt.

Für den Fall, daß das System „entartet" ist[2]), hat man ganz ähnlich zu verfahren und den Zeitmittelwert (5) durch einen Mittelwert über einen nunmehr weniger als r-dimensionalen Bereich zu ersetzen. Wenn das Teilsystem periodisch ist, was unter Umständen den äußersten Fall der Entartung darstellen kann, wird der Zeitmittelwert (5) direkt in der Form

$$\frac{1}{P} \int_0^P \frac{\partial G}{\partial a} \, dt = 0$$

verwendet, die unmittelbar das Verschwinden von (7) erkennen läßt, da die Integration nach dt jetzt nur über die Periode P zu erstrecken ist.

Die besondere Eigentümlichkeit der bedingt periodischen Systeme, daß man ihre Zeitmittelwerte durch Mittelwerte über ein mehrdimensionales Gebiet ersetzen kann, rührt daher, daß alle ihre Zeitmittelwerte nur Funktionen der Konstanten der ersten Gruppe der Integrale in der „Hamiltonschen Form", $\alpha_1 \ldots \ldots \alpha_r$ sind. Es wäre nun ganz gut denkbar, daß es noch andere stabile, nichtperiodische Systeme gibt, deren Zeitmittelwerte auch nur von einer beschränkten Zahl von zeitfreien Integralen abhängig sind; sie könnten dann in ähnlicher Weise verwendet werden, sofern sie adiabatische Invarianten besitzen. Die Zeitmittelwerte gewisser quasiergodischer Systeme, nämlich die mikrokanonischen Mittelwerte, haben diese besondere Eigenschaft; sie sind Funktionen der Energiekonstanten α_1 allein. Doch ist bis jetzt noch nicht einmal festgestellt worden, ob solche Systeme, die also hier als Teilsysteme auftreten würden, überhaupt ohne logischen Widerspruch denkbar sind[1]). —

§ 5. Nach dem Vorangehenden ist also die adiabatische Invarianz der Gewichtsfunktion G notwendig und hinreichend für die Anwendbarkeit des Boltzmannschen Prinzips auf in endliche Volumina eingeschlossene Gesamtheiten stabiler Systeme von beliebig vielen Freiheitsgraden. Damit ist unter den hier angenommenen, weitesten Voraussetzungen die allgemeine Lösung des von Ehrenfest aufgeworfenen Problems erbracht.

Die von Ehrenfest — unter engeren Voraussetzungen (vgl. § 1) — angegebene Partiallösung besagt, daß jede für G angenommene „reine" Funktion des einem Systeme mit geschlossener Energiefläche zugehörigen Phasenvolumens i der Bedingung (3) Genüge leistet. Dieser, sowie der daraus gefolgerte Satz, daß $\Gamma(i)$ zugleich die allgemeinste Gewichtsfunktion darstellt, in der die q, p nur in der Verbindung $\varepsilon(q, p, a)$ auftreten, ist aber in der ausgesprochenen Allgemeinheit nicht zutreffend, wenn man eine beliebige endliche Begrenzung des μ-Raumes auch unter Beibehaltung der übrigen Ehrenfestschen Voraussetzungen annimmt, um den realen Verhältnissen Rechnung zu tragen. Vielmehr muß dann i unbedingt eine adiabatische Invariante sein, was aber für periodische Systeme von einem Freiheitsgrade (den von

1) F. Hasenöhrl, Wien. Ber. 120, (IIa), 923, 1911, § 2.

2) Bei dieser Gelegenheit sei übrigens hervorgehoben, daß nach dem Inhalte der Adiabatenhypothese für ein „entartetes" System dieselben Quantenansätze zu gelten haben, wie für ein „nicht entartetes", wenn die „Entartung" durch Nullsetzen eines willkürlich veränderlichen Parameters zustande kommt.

1) P. Hertz, l. c. Nr. 250, insbes. Anm. 4 auf S. 484. Für die Quantentheorie dürften solche Systeme kaum in Betracht kommen. Vgl. dazu M. Planck, Berl. Ber. 1916, S. 653, § 4—6, wo schon von dem Boltzmannschen Prinzipe Gebrauch gemacht wird.

Ehrenfest allein behandelten Fällen) stets zutrifft[1]).

Der (l. c. nicht veröffentlichte) Beweis der Ehrenfestschen Lösung ergibt sich auch auf folgendem einfachen Wege[2]), der die Beziehung zu dem Obigen klar hervortreten läßt. Wie in § 2 gezeigt wurde, ist bei Berücksichtigung der Integration über den ganzen unendlichen μ-Raum das Verschwinden des mikrokanonischen Mittelwertes von $\frac{\partial G}{\partial a}$ notwendig und hinreichend für das Erfülltsein von (3) und das Boltzmannsche Prinzip. Anderseits ist von P. Hertz gezeigt worden[3]), daß das Phasenvolumen i adiabatisch-invariant ist, wenn man an Stelle des Zeitmittelwertes einen mikrokanonischen Mittelwert verwendet. Dies bedeutet also (vgl. (5)), daß der mikrokanonische Mittelwert von

$$\frac{\partial i(q,p,a)}{\partial a} = \frac{\partial i(\varepsilon,a)}{\partial a} = \frac{\partial i}{\partial a} + \frac{\partial i}{\partial \varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial a}$$

verschwindet, womit der Beweis, daß G gleich $I'(i)$ sein kann, bereits erbracht ist.

Die erwähnte Folgerung, die Ehrenfest aus diesem Resultat für die allgemeinste, nur von der Energie $\varepsilon(q,p,a)$ und den a abhängige Gewichtsfunktion gezogen hat, läßt sich — nun wieder unter der Voraussetzung endlicher Begrenzungen des μ-Raumes — in folgender Weise verallgemeinern: Es sei

$$\psi(q,p,a)$$

ein zeitfreies Integral der Bewegungsgleichungen des Teilsystems und $J(\psi,a)$ eine adiabatische Invariante, welche die Phasen q, p nur in der Verbindung $\psi(q,p,a)$ enthält. Dann ist jede weitere adiabatische Invariante, die auch diese Eigenschaft besitzt, eine „reine" Funktion von J. Da J offenbar längs der „ψ-Flächen" im μ-Raume konstant ist, läßt sich die adiabatische Invariante $K(\psi,a)$ auf die Form $K_1(J,a)$ bringen. Nach (5) muß aber sein

$$\frac{\partial J}{\partial a} = 0$$

und gleichzeitig

$$\frac{\partial K_1}{\partial J}\frac{\partial J}{\partial a} + \frac{\partial K_1}{\partial a} = 0.$$

Es folgt also, daß die zeitlich konstante Größe $\frac{\partial K_1}{\partial a}$ Null sein muß, oder daß

$$K(\psi,a) = K_1(J)$$

ist, wie zu beweisen war.

§ 6. Es ist nun leicht, die Bedeutung der gewonnenen Resultate für die Adiabatenhypothese zu erkennen. Wenn die Quantenansätze, wie die Adiabatenhypothese verlangt, auf Grund adiabatisch-invarianter Größen vorgenommen wurden, sind auch die „Quantengewichte" p als Funktionen der Elementargebiete, d. h. allein der Quantenzahlen, die den einzelnen Elementargebieten zugeordnet sind, adiabatische Invarianten. Die Quantengewichte sind aber nichts anderes als die jetzt diskontinuierliche Gewichtsfunktion G, die somit adiabatisch-invariant ist, wenn es die Quantenansätze waren.

Die Quantenansätze von Sommerfeld für periodische Systeme und von Epstein und Schwarzschild für bedingt periodische Systeme sind, wie Ehrenfest und Burgers gezeigt haben, in der Tat adiabatisch-invariant. Die Abgrenzung des μ-Raumes wird hier durch gewisse ganzzahlige Grenzwerte bewirkt, welche von den einzelnen Quantenzahlen nicht überschritten werden können. Aus der adiabatischen Invarianz der Quantenansätze folgt, daß diese Grenzwerte bei einer adiabatisch-reversiblen Beeinflussung unverändert bleiben, dasselbe folgt aus der Quantenhypothese für eine infinitesimale Wärmezufuhr; die Grenzen von (4) verhalten sich daher, wie oben bereits vorweggenommen wurde, gegen eine infinitesimale, reversible Beeinflussung überhaupt invariant. Nach dem Obigen läßt sich also das thermodynamische Verhalten einer begrenzten Gesamtheit periodischer oder bedingt periodischer Teilsysteme (Moleküle) mit Hilfe des Boltzmannschen Prinzips berechnen und das gleiche gilt notwendig-hinreichend von Gesamtheiten beliebiger stabiler Teilsysteme beliebig vieler Freiheitsgrade, deren Quantenansätze auf Grund adiabatisch-invarianter Größen vorgenommen wurden.

Die Ausdehnung der Quantentheorie auf Systeme von mehreren Freiheitsgraden ist merkwürdigerweise ganz ohne Rücksicht auf den II. Hauptsatz der Thermodynamik erfolgt. Die außerordentlich bedeutsame, prinzipielle Ableitung des Strahlungsgesetzes, die von Einstein für Moleküle beliebig vieler Freiheitsgrade gegeben worden ist[1]), berücksichtigt zwar (abgesehen von der Verwendung einer verallgemeinerten kanonischen Verteilung) den II. Hauptsatz in der Gestalt des Wienschen Verschiebungsgesetzes, gestattet aber nicht, die

1) P. Ehrenfest, II, § 5.

2) Die Kenntnis des ursprünglichen Beweises erhielt der Verfasser durch eine gütige, briefliche Mitteilung Herrn Professors Ehrenfest, wofür er ihm zu großem Danke verpflichtet ist.

3) P. Hertz, l. c. Nr. 270, S. 534; P. Ehrenfest II, § 5, Anm. 1 auf S. 335.

1) A. Einstein, diese Zeitschr. 18, 121, 1917.

Tragweite dieser Einschränkung für die quantentheoretisch ausgezeichneten Zustände zu ermessen. Diese Lücke wird von der Adiabatenhypothese ausgefüllt. Eine wichtige Seite ihrer sonst noch ungeklärten physikalischen Bedeutung besteht also darin, daß sie die Verträglichkeit der auf Systeme von mehreren Freiheitsgraden erweiterten Quantentheorie mit dem II. Hauptsatz der Thermodynamik garantiert, in der Form, in der dieser durch das Boltzmannsche Prinzip zum Ausdruck gebracht wird.

Berlin, Januar 1918.

(Eingegangen 5. Februar 1918.)

Über den Sehraum.

Von H. Witte.

(Vorläufige Mitteilung über eine gemeinsam mit Herrn E. Laqueur unternommene Arbeit.)

Mit Tafel II.

I.

Ein Gegenstand werde ins Auge gefaßt. Etwa der Federhalter, das Papierblatt, der Schreibtisch, das Fenster, draußen ein Weg, ein Haus, ein Baum, ein Wald, ein Berg. Eine seiner wahren Längenabmessungen („Größe") senkrecht zur Blickrichtung betrage L, sein wahrer Abstand vom Auge R wahre Längeneinheiten. Dann ist der zugehörige Sehwinkel φ gegeben durch 2 arc tang $L/2R$, in erster Näherung

$$\varphi = \frac{L}{R}. \qquad (1)$$

Diesen Winkel φ nennt man in der Physik die „scheinbare Größe". Man sagt etwa: Die scheinbare Größe des Mondes beträgt $^1/_2$ Grad; die scheinbare Größe der Venus schwankt zwischen 10 und einigen 60 Sekunden; vollständige Sonnenfinsternisse sind möglich, weil die scheinbare Größe von Sonne und Mond nahezu gleich ist; ein Fernrohr vergrößert den Sehwinkel und damit die scheinbare Größe.

Die scheinbare Größe eines Gegenstandes entspricht danach dem Sehwinkel oder auch dem Netzhautbild und nimmt umgekehrt proportional mit der Entfernung ab.

II.

Hiergegen wendet sich die psychologisch-physiologische Wissenschaft. Sie sagt etwa folgendermaßen:

Wäre die physikalische Begriffsbestimmung richtig, so müßte man die Vorstellung haben: Der Stuhl im Nebenzimmer ist für dich vielemal zu klein; wenn du dich hinten an die Wand stellst, rennst du die Zimmerdecke ein und trittst ein Loch in den Fußboden; das Konversationslexikon im Bücherbord kannst du in die Tasche stecken; das Haus drüben ist eine Zwergenwohnung; Nachbars rechteckiger Garten ist schief; und so weiter. Diese Vorstellungen hat man aber nicht. Man zweifelt keinen Augenblick, daß der Garten ein gleichmäßiges Viereck ist; man empfindet das Haus als dem eignen vergleichbar, die entfernte Zimmerwand als gleich großen Teil des Wohnraums; beim Blick auf das dicke Lexikon spannt sich die Hand im Gefühl des breiten Umfangs des Buches; der Stuhl ladet zum Sitzen ein. Wird zum Beispiel der Stuhl von mir weg bis in die fernste sichtbare Ecke des langen Nebenzimmers getragen, so bleibt er für mein Auge immer der Stuhl, auf den ich mich setzen kann. Ich sehe ihn immer gleich groß, obwohl sein Sehwinkel φ schließlich weniger als den zwanzigsten Teil des Anfangswertes beträgt.

Die Erklärung dafür: Zwar wird das Netzhautbild, der Sehwinkel φ mit wachsender Entfernung immer kleiner. Genau im selben Verhältnis wächst aber eben die Entfernung R und dies Wachstum rechnen wir unbewußt ein. Wir sagen uns: In R-facher Streckenentfernung gehört zu jeder Sehwinkel-Einheit der R-fache Größenwert; wir vervielfachen also das Netzhautbild unbewußt mit der Entfernung R. Das heißt, wir bilden

$$l = \varphi \cdot R \qquad (2)$$

oder, eingesetzt

$$l = \frac{L}{R} \cdot R.$$

So hebt sich die Entfernung R wieder heraus, und wir erleben

$$l = L. \qquad (3)$$

Die „scheinbare Größe" l ist nicht der Sehwinkel φ, sondern die wahre Größe L.

III.

Diese Lehre spielt in psychologischen und physiologischen Schriften eine große Rolle. Als Belege werden hauptsächlich angeführt:

A. Das Erlebnis selbst, wie soeben geschildert. Bei abnehmendem Sehwinkel wird derselbe Gegenstand durch Anrechnen der zunehmenden Entfernung gleich groß gesehen.

B. Eine Art von Umkehrung. Bei gleichem Sehwinkel (Netzhautbild) wird größerer Entfernung ein proportional größerer Gegenstand zugeordnet. Einfachstes Beispiel der bekannte Nachbildversuch. Man erzeuge, etwa aus deutlicher Sehweite, ein (negatives) Nachbild im Auge; nähert sich die Bezugsfläche, z. B. Hand,

so wird das Nachbild kleiner und kleiner gesehen, entfernt sie sich, größer; letzteres sehr auffallend beim Hinwerfen auf die Zimmerwand.

Der Satz selber — also das Aufheben der Verkleinerung des Sehwinkels φ durch unbewußtes Multiplizieren mit der Entfernung R — heißt der „Sehwinkelsatz" (besser, „Sehwinkel-Aufhebungssatz") und wird mit Entschiedenheit der physikalischen Begriffsbestimmung entgegengehalten [1]).

IV.

Endgültig gefaßt wird er allerdings erst durch eine kleine Einbesserung. Es ist den Vertretern dieser Lehre nicht entgangen, daß eine solche nötig ist. Sie weisen selber auf mannigfache Beispiele hin. Das einfachste ist die scheinbare Konvergenz paralleler Linien. Wäre der Satz streng richtig, so müßten etwa parallele Eisenbahngleise dem entlang blickenden Auge streng parallel erscheinen. Das tun sie jedoch nicht, sie laufen in sehr großer Entfernung zusammen. Ein anderes Beispiel: Beim Hinausblicken aus dem fahrenden Wagen dürften sich, wegen der Parallelität, die zur Fahrtrichtung senkrechten Landschaftslinien nicht drehen. Sie drehen sich aber doch. Und so fort.

Diese und ähnliche Abweichungen erklärt die psychologisch-physiologische Wissenschaft so: Wir machen bei jenem unbewußten Einrechnen der Entfernung einen ebenso unbewußten Fehler. Wir unterschätzen die wahre Entfernung R, das heißt jenes R, mit dem wir unbewußt multiplizieren, das R im Zähler. Nennen wir die wahre Entfernung nach wie vor R, die geglaubte r, so kommt statt (2) jetzt:

$$l = \varphi \cdot r = \frac{L}{R} \cdot r, \qquad (4)$$

es wird nicht

$$l = L,$$

sondern

$$l = \frac{r}{R} \cdot L. \qquad (5)$$

Also in der Tat weniger als L.

V.

Wieviel weniger, das hängt von dem Zahlenwert des Unterschätzungsfaktors oder Verkleinerungsfaktors

$$\frac{r}{R}$$

ab. Derselbe ist naturgemäß wieder eine Funktion von R. Es fragt sich bloß, welche. Zunächst kann man, im Sinne der psychologisch-physiologischen Auffassung, nur sagen: Die Funktion muß die Grundforderung erfüllen, daß der „Sehraum" dem wahren Raum bis auf sehr beträchtliche Entfernungen hin sehr nahe bleibt. Denn grundsätzlich sollen durchaus die Ausführungen des § 2 zu Recht bestehen. Eigentlich sehen wir gemäß dem strengen Sehwinkel-Aufhebungsgesetz die Gegenstände mit beliebig wachsender Entfernung R dauernd ganz gleich groß. Es darf sich lediglich um eine Korrektur handeln, hauptsächlich für große Entfernungen. Diese Korrektur soll dann solche Erscheinungen wie das Zusammenlaufen der Schienen usw. erklären.

VI.

Es hat sich nun schließlich ein Mathematiker, Herr v. Sterneck [1]), der außerordentlichen Mühe unterzogen, auf Grund zahlreicher Messungen eine einfache Funktion r/R zu bestimmen, die das leistet, was die Psychologen und Physiologen — immer im Gegensatz zu den Physikern — wollen.

Sein Verfahren ist dieses.

Zunächst werden im Gelände Entfernungen geschätzt. Von einem festen Standpunkte O aus gibt man die relativen Maßzahlen an für die scheinbaren Entfernungen $r_1 = OP_1$, $r_2 = OP_2$ usw. einer Anzahl von Geländepunkten P_1, P_2 usw. Setzt man die scheinbare Entfernung r_1 des nächstbenachbarten Punktes gleich 100, so erscheinen etwa Zahlen wie 120, 150, 200 usw. Mit diesen Zahlen vergleicht man die bekannten wirklichen Entfernungen R_1, R_2 usw. Bildet man die Verhältnisse $r_1 : r_2 : r_3$ usw. einerseits, $R_1 : R_2 : R_3$ anderseits, so zeigt sich bereits, daß die beiden Reihen nicht übereinstimmen. Die erste (r) steigt verhältnismäßig nicht so schnell an wie die zweite (R). Allerdings fehlen nun noch die absoluten Zahlenwerte für die r. Sie können aber offenbar gewonnen werden auf Grund der Ausgangsvoraussetzung, daß in der Nähe Sehraum und wahrer Raum übereinstimmen, $r = R$ sein muß. Herr v. Sterneck verfährt etwas anders. Er führt noch eine zweite unbezweifelbare Grundtatsache ein. Bei außerordentlich weiten Entfernungen sind wir überhaupt außerstande, Entfernungsunterschiede zu behaupten; die Beispiele ferner Berge und Wolken, der Himmelskörper zeigen das deutlich. Von einer gewissen weiten Entfernung R an erscheinen alle noch weiteren R gleich groß, die geschätzte Entfernung r erreicht einen Grenzwert

1) Also auch der etwaigen Behauptung, man sehe „perspektivisch". Gemäß den obigen Beispielen sieht man eben nicht perspektivisch. Perspektivisches Zeichnen ist in diesem Sinne die Kunst, entgegen dem naturgewohnten Eindruck dennoch schwinkeltreu zu zeichnen.

1) R. v. Sterneck, Der Sehraum auf Grund der Erfahrung. Leipzig, J. A. Barth, 1907.

$$r_{max} = (r)_{R=\infty} = \varrho,$$

der nicht überschritten werden kann. Es gelingt Herrn v. Sterneck nun, eine äußerst einfache Funktion[1]) anzugeben, die mit einem Griffe beide Bedingungen, diese wie die vorgenannte, erfüllt und die sämtlichen relativen Maßergebnisse in befriedigender Weise zusammenfaßt.

VII.

Kennt man die r in absoluten Einheiten, so kann man auch die Quotienten r/R angeben und damit auch die Verkleinerung l/L. Auf die letztere kommt es uns an. Ich habe in der folgenden Tafel die Werte ausgerechnet, wie sie sich aus der Sterneckschen Funktion für Durchschnittsgelände und hellen Tag ergeben[2]). Um das Bild zu vervollständigen, sind auch die absoluten Zahlenwerte für die scheinbaren, zu klein geschätzten Entfernungen r eingesetzt.

Wahre Entfernung R	Scheinbare Entfernung r	Unterschied $R-r$	Verkleinerungsverhältnis auf $\frac{l}{L}$	Verkleinerungsverhältnis um $\frac{L-l}{L}$	Sehwinkel φ
0 m	0 m	0	100 Proz.	0 Proz.	—
1 m	0,9999	0,1 mm	99,99 „	0,01 „	1
10	9,99	1 cm	99,9 „	0,1 „	10 Proz.
100	99	1 m	99 „	1 „	1 Proz. $= 10^{-2}$
1 km	0,909 km	91 m	90,9 „	9,1 „	10^{-3}
10 km	5 km	5 km	50 Proz.	50 Proz.	10^{-4}
100 km	9,09 km	90,91 km	rund 9 Proz.	91 Proz.	10^{-5}
1000	9,9	↓	1 Proz. $= 10^{-2}$	↓	10^{-6}
10000	9,99	↓	10^{-3}	↓	10^{-7}
100000	9,999	↓	10^{-4}	↓	10^{-8}
1 Million km	9,9999	↓	10^{-5}	↓	10^{-9}
↓	↓	↓	↓	↓	↓
∞	10 km	∞	0	100 Proz.	0

Herrn v. Sternecks Formel leistet demnach genau das, was die Psychologen und Physiologen mit ihrem korrigierten Sehwinkel-Aufhebungssatz behaupten.

Als anschaulichstes Beispiel betrachte man einen Menschen, der sich vom Beobachter aus geradlinig bis ins Unendliche entfernt. Eigentlich, wenn der Sehwinkel-Aufhebungssatz genau gälte, sollte er dauernd gleich groß aussehen, l/L dauernd = 100 Proz. Nun die gewünschte Korrektur. Innerhalb eines sehr beträchtlichen Nahraums, bis 1 km, bleibt die scheinbare Entfernung r der wahren Entfernung R fast gleich. Infolgedessen wird nach dem Sehwinkel-Aufhebungssatz der Mensch bis dahin fast in voller Größe gesehen. Bis 100 m wird er einen Finger breit (1 Proz.) kleiner, innerhalb der dann folgenden 900 m noch lange nicht einen Kopf kleiner (9 Proz.). Erst von hier ab fängt die Verkleinerung richtig an. Bei 10 km liegt ein Scheidewert. Hier erscheint der Mensch genau halb so groß wie er ist, also so groß wie ein halbwüchsiges Kind, wohlverstanden dieses in nächster Nähe. Wird die wahre Entfernung R noch größer, 100 km und mehr, so nähert sich die scheinbare Entfernung r merklich dem Grenzwert 10 km. Der ganze unendliche Rest des wahren Raums rückt in den schmalen Gürtel des letzten Schein-Kilometers unsres Schraumes zusammen. Die Unterschätzung der wahren Entfernung wird daher jetzt immer stärker und stärker, ebenso die Verkleinerung der scheinbaren Größe. Trotzdem aber bleibt immer noch auf beträchtliche Entfernungen hin eine ansehnliche Größenwertung bestehen. Bohrt man ein Loch durch die Erde oder blickt mit Hilfe von Spiegeln im Erdhalbkreis, 20000 km, herum, so sieht unser Auge unsre Gegenfüßler immerhin ungefähr so groß wie ein Millimeter in der Nähe; beim Blick auf eine kleine Stadt in jener Ferne recken sich die Arme, um etwa ein Meter als Vergleichsgröße in der Luft abzugreifen.

VIII.

Die letzte Spalte zeigt aufs deutlichste den großen Unterschied gegenüber der physikalischen Begriffsbestimmung. Hier habe ich (unter Vernachlässigung der Tangensfunktion) die wirkliche Sehwinkelabnahme eingetragen. In der Entfernung 1 m habe ich den Sehwinkel gleich 1 gesetzt, so können die Zahlen unmittelbar mit

1) $\frac{\varrho}{\varrho + R}$.

2) Bei anderen Gelände- und Lichtverhältnissen ändert sich der Parameter $\varrho = r_{max}$.

denen für die psychologisch-physiologische Verkleinerung verglichen werden.

Die psychologischen Zahlen nehmen in der Tat außerordentlich viel langsamer ab. Auf 10 m ist der psychologische Wert rund 10 mal größer, auf 100 m fast 100 mal (Psychologengröße um 1 Proz., Sehwinkel auf 1 Proz. verkleinert), in Entfernungen von der Größenordnung des Erdhalbkreises 20000 km hat das Wertverhältnis längst den festen Betrag 10000 zu 1 erreicht, auf dem es dann stehen bleibt.

Der Unterschied ist eben ein grundsätzlicher. Der psychologisch-physiologische „Sehraum" ist und bleibt grundsätzlich der wahre Raum, nur mangels zutreffender Schätzung der Entfernungen nicht genügend weit in die unendliche Umwelt hinausgestreckt. Der physikalische „Sehwinkel" besagt grundsätzlich ganz etwas anderes und hat mit dem räumlichen Erfassen der Umwelt zunächst nicht das geringste zu tun.

Es ist nötig, diesen grundsätzlichen Unterschied, sowie die dadurch bedingte außerordentliche Wertedifferenz streng festzuhalten. Zur Veranschaulichung gebe ich noch ein graphisches Bild. Abszisse ist die wahre Entfernung R,

Fig. 1.

Ordinate die scheinbare Größe bzw. der Sehwinkel, beide in der Entfernung 1 m gleichgesetzt. Kurve 1a vertritt den unverkürzten, grundsätzlichen psychologisch-physiologischen Sehraum, in dem die scheinbare Größe dauernd gleich der wirklichen bleibt (wahrer Raum). Kurve 1b gehört zu dem berichtigten, einwärts geschobenen Psychologen-Schraum. In weitestem Abstand von ihr läuft die physikalische Sehwinkelkurve 2a. Für große R nähert sich allerdings auch die Psychologenkurve der Abszissenachse, aber das Ordinatenverhältnis bleibt dann dauernd $10^4 : 1$.

IX.

Besonders aufmerksam machen möchte ich noch auf den Endwert der scheinbaren Entfernung $r = 10$ km. Er ist ja derjenige Parameter, der die Maße des Scheinraums festlegt. Man wird gern zugeben: Wenn die ganze psychologisch-physiologische Auffassung überhaupt zu Recht bestehen soll, dann sind jedenfalls diese 10 km ein durchaus vernünftiger und angemessener Wert. Würden kleinere Zahlen angegeben, so könnte man nicht mehr denjenigen Eindruck der Ausgedehntheit und Weite des Raumes haben, den man tatsächlich hat.

Die Zahlenangaben Herrn v. Sternecks liegen also in jeder Weise durchaus in der Sache selber begründet, sie sind der wirkliche richtige zahlenmäßige Ausdruck derjenigen Erlebnistatsachen, die die Psychologen und Physiologen erleben und erlebt haben und zum Ausdruck bringen wollen.

Wenn ich mir daher im folgenden gestatte, diesen Sehraum der Psychologen nach seinem Errechner den Sterneckschen Sehraum zu nennen, so stelle ich damit die Tatsache fest, daß Herr v. Sterneck genau das ausgeführt hat, was die psychologischen und physiologischen Theoretiker wünschen. Die tragenden Grundvoraussetzungen sind diese: 1. Die scheinbare Entfernung r wird gegenüber der wahren zunächst wenig, weiterhin mehr unterschätzt, 2. der Sehwinkel-Aufhebungssatz: auf diese scheinbare Entfernung r hin wird jeder Körper innerhalb seines starren Sehwinkel-Kegels verlegt und in derjenigen Größe erlebt, die er an dieser Stelle hat. — Auf Grund dieser Voraussetzungen kommt man mit Notwendigkeit zum Sterneckschen Sehraum.

X.

Physikalisch bemerkenswert ist besonders die Erklärung, die sich aus dem psychologisch-physiologischen Sehraumgesetz für die scheinbare Gestalt des Wolkenhimmels ergibt. Im Sterneckschen Sehraum ist der Wolkenhimmel eine Kuppel von (im Mittel) folgenden scheinbaren Abmessungen: Durchmesser 20 km, Höhe 2 km.

Würde man die oft gemachte[1]) Annahme wiederholen, die scheinbare Wölbung des unbewölkten Himmels sei auf die des Wolkenhimmels zurückzuführen, so käme man nach Herrn v. Sterneck auf ähnliche Ziffern, nur würde die Höhe der Kuppel etwas größer sein.

Zugleich würde man damit in bekannter Weise eine erneute, nunmehr quantitativ belegte Antwort gefunden haben auf die uralte berühmte Frage nach der scheinbaren Vergrößerung der Sonne, des Mondes, der Sternbilder usw. am Horizont; Mond usw. usw. bei gleichem Sehwinkel, innerhalb ihres starren Sehwinkel-Kegels auf entferntere Teile der Kuppel verlegt, deshalb größer gesehen.

1) Helmholtz, Handbuch der physiologischen Optik, S. 631. Leipzig, Voß, 1867.

Herr v. Sterneck macht das allerdings so nicht, aus Gründen, die sogleich hervortreten werden.

XI.

Die Frage nach der Vergrößerung des Mondes usw. am Horizont ist seit dem Altertum sehr oft behandelt worden, auf die verschiedenste Weise, von den erlauchtesten Geistern. Aber sie ist durchweg, über die ganzen Jahrhunderte hin, merkwürdig einseitig aufgestellt. Man hat immer nur gefragt: Warum sieht der Mond unten, am Horizont, größer als oben — oder oben kleiner als unten — aus? aber niemals: Warum sieht er — sei es oben, sei es unten — so groß aus, wie er aussieht?

XII.

Er sieht nämlich irgendwie groß aus. Es läßt sich auch unmittelbar einsehen, daß er irgendwie groß aussehen muß. Sähe er nicht irgendwie groß aus, dann könnte er nicht oben kleiner als unten, oder unten größer als oben aussehen.

Das feste Größenmaß beträgt für Durchschnittsmenschen und Durchschnittsumstände etwa einen Teller. Wenn der Mond groß aussieht, also tief steht, dann sieht er aus wie ein mittelgroßer bis großer Teller; wenn er klein aussieht, hoch steht, wie ein kleiner Teller bis etwa Dauerwarenbüchsendeckel. Die Sonne[1]) oben, klein, wie ein Teller; unten, groß, wie eine Schüssel oder ein Waschbecken. Man neigt von Kindheit her dazu, diese Größen mit beiden Händen, als ob man eine unsichtbare Scheibe hielte, nachzubilden; man kann unschwer genauere Maße festlegen und mit Versuchspersonen bestätigen. Genau so Abstand von Sternen: Beim Anblick der drei Gürtelsterne des kulminierenden Orion greifen die Hände einen unsichtbaren Leibriemen von etwa 60 cm Querdurchmesser nach; Sirius und sein Nachbarstern β des großen Hundes treiben, wenn sie sehr tief stehen, die Hände über halbklafterweit auseinander; Procyon und β Canis minoris je nach Höhe vielleicht eine Spanne weniger; Jupiter und Venus sah man bei der Konjunktion von 1916 fast eine Handbreit einander nahe kommen; usw.

XIII.

Man sieht nun unmittelbar, daß diese Größenmaße mit den obigen Sehraumlehren ganz und gar nicht in Einklang zu bringen sind.

Nach dem „Sehwinkel-Aufhebungsgesetz" müßte folgendes stattfinden:

1. Nach dem strengen Gesetz müßte der Mond innerhalb seines Sehwinkel-Kegels an diejenige Stelle verlegt werden, wo er sich wirklich befindet und demgemäß so groß gesehen werden wie er ist, also rund 3500 km groß.

2. Nach dem eingebesserten Gesetz, also im Sterneckschen Sehraum, dies zwar nicht, sondern soviel kleiner, wie die Entfernungs-Unterschätzung ergibt. Die scheinbare Entfernung r beträgt am Horizont 10 km (Maximalausdehnung des Sehraums), die wahre Entfernung R durchschnittlich 385 000 km, so ergibt sich eine scheinbare Größe l von etwa 90 m. So groß müßte der tiefstehende Mond gewertet werden, d. h. wohlverstanden wie 90 m in nächster Nähe; wie ein Turm im nächsten Vordergrund. Der hochstehende Mond zwar etwas weniger groß, aber von gleicher Größenordnung, über hausgroß.

Das sind ganz gehörig große Zahlen. Ganz anders als jene Tellergrößen, jene 20 oder gar 10 cm. Die Abweichung beträgt mehr als 40000 Proz. Es ist kein Gedanke daran, die Theorie jenes „Schraums", turmhoher Mond usw., und diese Teller-Erlebnisse unter einen Hut zu bringen.

XIV.

Das Empfinden: hier klafft ein unüberbrückbarer Widerspruch, war vermutlich auch die Ursache, daß bisher nur die Vergrößerungsfrage behandelt wurde, die Größenfrage nicht. Gelegentlich schimmert die Größenfrage allerdings durch, verschwindet aber sofort wieder in einem zwischen den Zeilen dahinhuschenden Verlegenheitslächeln. Dasselbe Lächeln, manchmal mit leiser Entrüstung vermischt, daß man der Versuchsperson so kindliche Anschauungen zumute, begegnet einem übrigens fast täglich, wenn man gebildete Laien vornimmt und ihnen die obigen Tellergrößen usw. nach mehr oder minder lebhaftem Sträuben entlockt.

Besonders anschaulich wird das Mißverhältnis, wenn man sich folgende Frage vorlegt:

Gegeben der feste wahre Mond-Sehwinkel von durchschnittlich 30 Minuten. An welcher Stelle dieses Raumkegels, der sich vom Beobachter fast 400000 km hin bis zum Monde erstreckt und dort 3500 km auseinandersperrt, ist eine ideale Ersatz-Mondscheibe befestigt zu denken, und wie groß muß dieselbe sein, wenn sie nach dem Sehwinkel-Aufhebungssatz wirklich so groß wie ein Teller aussehen soll?

Rechnet man zunächst ohne Rücksicht auf die Sterneckssche Einbesserung im unverkürzten Raum, so kommt, Tellergröße = 20 cm gesetzt:

$$\frac{x}{20\text{ cm}} = \frac{385\,000}{3480},$$

[1]) Mit Irradiation.

also rund

$$x = 22 \text{ m}.$$

Da in dieser Entfernung die Sterneckschе Sehraumverkürzung unter 1 Proz. bleibt ($r = R$), so ist dieses mit genügender Genauigkeit der gesuchte Wert R, und ebenso ist der angesetzte Scheinteller demjenigen wahren Teller gleich, der in diesem Abstand befestigt zu denken ist. Mit zunehmender Erhebung des Mondes wird der Ersatzteller noch kleiner, also die Entfernung $R = r$ ebenfalls. Ähnlich Sonne, Sterne, Sternenhimmel.

Diese Himmelsgebilde fallen daher aus dem übrigen „Sehraum" völlig heraus. Oder vielmehr, sie fallen in ihn an die denkbar unmöglichste Stelle mitten hinein: sie, die allerfernsten, in die allernächste Beobachtungsnähe.

XV.

Man muß in den Mondarbeiten usw. außerordentlich lange suchen, bis man auf ein bestimmtes Erfassen dieser Größenfrage stößt. Wir fanden sie, als wir schon alle Hoffnung aufgegeben hatten, klar aufgestellt in eben jenem bahnbrechenden Buche von Sterneck[1]). Hier wird schlicht und klar gesagt: Der Mond usw. sieht so und so groß aus; er wird also in seinem Sehwinkel-Kegel auf die und die außerordentlich nahe Entfernung verlegt; es besteht eine Bezugsfläche („Referenzfläche"), auf die wir den Mond verlegen. Entsprechend Sonne usw.

Herr v. Sterneck teilt umfassende und sorgfältige Berechnungen mit. Der ganze Abschnitt ist aber in seinem Buche eigentlich eine einzige große Frage.

Wir haben einerseits den Sehraum, so wie ihn die obige Zahlentafel (S. 144) oder das graphische Bild darstellen. Also jenes ausgedehnte große Raumgebilde wie oben geschildert, in seinen scheinbaren Maßen nach allen Richtungen hin viele Kilometer groß, praktisch abgeschlossen etwa durch jene Wolkenkuppel von 20 km Durchmesser und 2 km Höhe. Nun sollten dort und dorthinter die himmlischen Gebilde kommen, aber sie kommen da nicht. Sondern ihre „Bezugsflächen" stehen in Gestalt winziger Schalen von der Größenordnung $r = 20$ Meter lächerlich klein und eng in der innersten Mitte. Auf ihnen in glänzender Einsamkeit die silbernen Teller und goldenen Becken für Sonne und Mond, die greifbar zusammengerückten blitzenden Leuchtpunkte der Sterne, die „Schwerter", „Drachen", „Schlangen" usw. der Kometen, die „Sichel" des Mondes, die kopfgroßen Feuerkugeln, usw. usw.

Zwischen beiden aber, dem großen Sehraum[1]) bis zu seiner gewaltigen Wolkenkuppel hin und den merkwürdigen Schälchen mitten drinnen nicht die geringste sachliche Beziehung oder Zusammenhang. Die Referenzflächen haben mit dem Sehraum objektiv und subjektiv nicht das geringste zu tun.

Und zu dem allen hinzu noch jenes eigentümliche Gefühl, das man nicht loswerden kann: Eigentlich siehst du den Mond, namentlich wenn er hoch am Himmel steht, in dieser seiner kalten blanken Scheibengröße durchaus nicht nah, sondern weit, weit fern; und so die andern Himmelskörper auch.

XVI.

Wenn man die Frage nach allen Richtungen durchdenkt, kommt man zu allerhand Ergebnissen, deren Mitteilung ich uns auf später versparen muß. Hier will ich nur den einen grundsätzlichen Gedankengang andeuten, der in der Sehraum-Auffassung weiterführt.

Es drängt sich unabweisbar der Gedanke auf: Das Tellersehen des Mondes usw. muß doch mit „Sehraum" irgend etwas zu tun haben. Sonne, Mond und Sterne usw. sind Sehdinge, Sehgegenstände. Sie müssen also vernünftigerweise in einem Sehraum unterzubringen sein. Es muß möglich sein, diese himmlischen Gebilde aus ihrer glänzenden Vereinsamung zu befreien und irgendwie anderen Sehdingen, oder die anderen Sehdinge ihnen, zu einem stetigen und sinnvollen Gesamtbilde zuzugesellen.

XVII.

Es scheint nun die folgende Lösung möglich zu sein.

Der Psychologen-Sehraum (Sterneckscher Sehraum) werde nicht angezweifelt. Er möge, zumal er so lange und so entschieden von den psychologischen und physiologischen Fachgelehrten auf Grund eingehender Erwägungen behauptet worden ist, unangetastet bleiben[2]).

1) a. a. O. S. 43—90. In der mir nicht zugänglichen dritten Auflage (1910) von Helmholtz' Physiologischer Optik hat der Bearbeiter, v. Kries, ebenfalls die Größenfrage gewürdigt, wie ich einer soeben erschienenen Arbeit von R. H. Goldschmidt entnehme (Mitt. d. Ver. v. Freunden d. Astron. 27, Heft 9, S. 97). Sehr eingehend auch Höfler, vgl. Didaktik der Himmelskunde. Teubner 1913, S. 195. (Anm. bei der Korrektur.)

1) Die Maximalkonstante ϱ ändert sich allerdings mit den Lichtverhältnissen. Aber das hilft nichts. Man sieht den Mond ja auch bei Tage. Und die Sonne immer.

2) Wiewohl die Frage nicht von der Hand gewiesen werden kann, ob die oben wiedergegebenen Auffassungen nicht in sich selber schon Schwierigkeiten enthalten. So will mir scheinen, als ob im Psychologen-Sehraum Sehgegenstände bei noch recht beträchtlicher scheinbarer Größe in gewisser Entfernung unstetig verschwinden müßten. Den Gegenfüßler von § 7, den man 1 mm groß sehen sollte, kann man tatsächlich längst nicht mehr sehen, denn

Wenn dieser Sehraum (Sterneckscher Sehraum) bestehen bleibt, dann gibt es noch einen zweiten Größen-Sehraum bzw. eine zweite Art des Größen-Sehens.

In diesem zweiten Sehraum bzw. nach dieser zweiten Art des Sehens sehen wir Sonne, Mond und Sterne usw. Aber nicht nur diese, die einsam glänzenden Himmelsbilder, sondern alle Sehdinge überhaupt. Alle Sehdinge überhaupt sehen wir — oder können sie wenigstens sehen — noch auf eine zweite Weise.

Diese zweite Art des Sehens bleibt nicht der psychologischen Auffassung nahe, welche, von ihrem Sehwinkel-Aufhebungssatz ausgehend, eigentlich die Gegenstände immer in wahrer Größe sehen will, sondern gerade umgekehrt der physikalischen Begriffsbestimmung, welche unter scheinbarer Größe den Sehwinkel selber versteht.

XVIII.

Am anschaulichsten läßt sich, was damit gemeint ist, an solchen Gegenständen auseinandersetzen, die unseren Greifmaßen oder sonstigen unmittelbaren Erlebnismaßen zugänglich sind. Für größere Gegenstände ist der Gedanke sinngemäß zu übertragen.

Nehmen wir etwa wieder den Stuhl des § 2, der von uns weggetragen wird. In unmittelbarer Nähe (volle Erlebnisnähe, „Greifnähe") hat der Stuhl eine unmittelbare Erlebnisgröße, „Greifgröße". Das ist die wahre Größe L. Die physikalische Begriffsbestimmung[1]) würde dann nach dem Gesetze

$$\varphi = \frac{L}{R}$$

fordern: in doppelter Entfernung wird er halb so groß gesehen, in dreifacher ein Drittel, in zehnfacher ein Zehntel usw. Gesehen und auch nachgreifend empfunden.

Oder wieder das Schulbeispiel des fortmarschierenden Menschen: Auch er müßte bei strenger Gültigkeit der physikalischen Formel umgekehrt proportional der Entfernung kleiner gesehen werden. Setzen wir für die „Greifentfernung" bis auf weiteres der Einfachheit wegen den obigen (anfechtbaren) Wert 1 (vgl. letzte Spalte der Zahlentafel in § 7), so müßte der Mensch auf 1 km nicht wie bei den Psychologen nur einen Kopf kleiner aussehen, sondern der ganze Mensch fast so klein wie ein Stecknadelkopf usw.

sein Sehwinkel beträgt einen Bruchteil einer Bogensekunde. Der Sehwinkel erreicht schon bei 10 km Entfernung die Zäpfchengrenze, und hier sollte der Mensch nach dem Sehwinkelaufhebungssatze noch in halber Größe erscheinen.

[1]) Von der Abweichung der Tangensfunktion vom Winkel (§ 1) sehe ich ab.

Ich behaupte, es gibt in der Tat ein Sehen, das dieser Art des Sehens nahesteht[1]).

XIX.

Folgende Prüfungen und Messungen empfehlen sich hauptsächlich (vgl. § 3).

A. Das unmittelbare Sehen des Erlebnisses selbst, wie soeben behauptet. Wer's sieht, sieht's. Man muß sich aber erst etwas darauf einstellen. Denn man ist gewöhnt, auf ziemliche Entfernungen hin z. B. Menschen menschlich zu sehen.

In etwas weiteren Entfernungen kann man sehr wohl schätzen und messen. (Unwillkürliches) Nachgreifen mit den Händen, Vergleiche mit Bleistift, Finger, Stecknadel usw. Man findet als Durchschnitt bei verschiedenen Versuchspersonen eine Kurve 2b, die in der Tat der Physikerkurve 2a, scheinbare Größe = Sehwinkel, des § 8 nahebleibt.

Ich gebe eine einzige unausgeglichene Versuchsreihe:

Wahre Entfernung R	Scheinbare Größe im Sterneck-Raum (berechnet)	Sehraum II (geschätzt)
40 m	1,79 m	1,30 m
60		0,80
80		0,55
100		0,40
120		0,25
140	1,78 m	0,15

Soweit sich bei diesem Verfahren Genauigkeit erreichen läßt, ergibt sich, daß die Kurve 2b etwas höher verläuft als 2a, ein Ergebnis, das durch die beiden folgenden Meßweisen bestätigt wird. Das Größenerlebnis nimmt nicht ganz im selben Maße wie der Sehwinkel ab. Was man auch so ausdrücken kann: Mit zunehmender Entfernung findet im Verhältnis zum Sehwinkelbetrage eine geringe relative Überschätzung statt.

B. Umkehrung, insbesondere Nachbildverfahren. Nachbilder, namentlich solche von unverbindlicher Form, folgen auf mittlere und weitere Entfernungen hin ganz offenbar nicht dem Sehwinkel-Aufhebungssatz. Sie sollten ja nach dem unverkürzten Psychologen-Gesetze einfach proportional der Entfernung an Größenwert zunehmen bis ins Unendliche, weil der Sehwinkel fest bleibt. Im Sterneck-Raum müßten sie bis auf Bezugsentfernungen von 100 m praktisch genau so wachsen, also von 1 m ab bis auf den 100fachen Wert, bis 1 km auf den 900fachen, mit noch weiter zunehmender Entfernung müßten

[1]) Bei dem man also Größen angenähert „perspektivisch" sieht. Das perspektivische Bild bedeutet nicht nur ein zeichnerisches Als ob, sondern in gewissen Beziehungen ein angenähertes Wirklichkeitserlebnis.

sie schließlich den 10000fachen Größen-Erlebniswert erreichen wie bei der Bezugsfläche 1 m. Das tun sie nicht.

Gälte anderseits die physikalische Begriffsbestimmung genau, so sollte der zu empfindende Größenwert immer der gleiche bleiben wie aus einer Normalentfernung, etwa deutliche Sehweite, oder wie oben „Greifnähe", o. ä. Das ist in der Tat in gewisser Weise erfüllt; vollkommen natürlich nicht infolge der schon unter A festgestellten geringen Größerbewertung der Ferne. Der erlebte Größenwert wächst zunächst etwas an (jedoch bei weitem nicht so stark wie bei dem psychologischen Sehen), dann erreicht er verhältnismäßig bald einen verhältnismäßig kleinen Grenzwert, auf dem er stehen bleibt.

Erzeugt man z. B. ein Nachbild, dessen Sehwinkel 30 Minuten beträgt, etwa mittels einer pfenniggroßen hellen Scheibe aus 2 m Entfernung, und läßt es über das Gelände hinlaufen, so wird es schnell so groß wie ein Markstück, Taler, Fünfmarkstück usw. und dann so groß wie ein Teller. Nicht größer.

Hätte man die Nachbildversuche im Gelände gemacht, so hätte man sich dieser Einsicht kaum entziehen können.

C. Bei Verfahren A war die wahre Größe (L) gleich, es änderte sich erlebte scheinbare Größe und Sehwinkel (φ). Bei B blieb der wahre Sehwinkel (φ) fest, es änderte sich wahre (L) und scheinbare Größe. Besonders empfiehlt sich für Messungen ein Verfahren, welches den subjektiven Bestandteil, nämlich die scheinbare Größe, konstant zu halten versucht.

Man fasse nahe dem Horizont, sagen wir auf 5 km wahre Entfernung R, eine Länge L ins Auge, z. B. den wagerechten Abstand zweier Schornsteine auf den Ecken einer dort befindlichen Fabrik. Dann frage man sich: Wieviel siehst du anderswo im Raume, auf nähere und immer nähere Entfernungen, als „ebensoviel"?

Zweckmäßigerweise legt man die Bezugsstellen nicht gerade in dieselbe Blickrichtung. Das Ermitteln des „ebensoviel" machen die Versuchspersonen meist von selber durch Abgreifen mittels der Finger bei ausgestrecktem Arm, mit beiden Händen zugleich usw. Man kann ihnen auch unmittelbar einen Maßstab in die Hand geben und so Zahlen gewinnen. Liegt die Bezugsstelle in merklich gleicher Entfernung, so greift man wirklich ebensoviel ab; sagen wir zwei Finger breit. Je näher man nun die Bezugsstelle wählt, um so mehr ordnet man zu. Aber wieder nur sehr wenig mehr. Drei Finger breit, vier Finger breit; geht's mit dem Daumen und Zeigefinger einer Hand nicht mehr, dann nimmt man beide und endet schließlich in Greifnähe mit Zuordnen von vielleicht einem halben Klafter.

Sähe man hier psychologisch, so müßte man die Fabrik grundsätzlich als fast gleich große Fabrik erleben und daher geneigt sein, häuserweit zu greifen. Träfe der physikalische Begriff ganz genau zu, so müßte man auf nähere und nächste Entfernungen genau soviel abwinkeln wie auf weite. Tatsächlich greift man, je näher, etwas mehr ab. Man empfindet wieder nicht ganz genau nach dem physikalischen Gesetz, bleibt ihm aber wie bei A und B nahe.

Abbildung 2[1]) deutet das Verfahren C für den in der Ferne sichtbaren Schloßturm an.

In einfachster Weise kann so stetig der ganze Raum ausgewertet werden. Man kann alles zahlenmäßig bestimmen. Auch für verschieden große Sehwinkel der ursprünglichen Fernobjekte, in anderen als wagerechten Richtungen, usw.

XX.

Besonders wichtig ist bei C diejenige Größe, die man beim Abgreifen in nächster Nähe dem Fernobjekt, im Beispiel Schornsteinabstand, zuordnet. Sie vermittelt den Anschluß an die Verfahren B und A und an die Ausgangsfrage. So groß „sieht" das Objekt „aus". Die Fabrik sieht einhalbklafterbreit aus.

Die Frage nach der Scheingröße des Mondes und der anderen Himmelsgebilde wird damit allgemeinen Sehgesetzen eingeordnet.

Beim Horizont-Monde spielt sich das Verfahren C so ab: Wird die Bezugsstelle in großer Entfernung vom Beobachter gewählt, am Horizont, so wird wieder wirklich ebensoviel abgegriffen, d. h. nahezu ein solcher Fingerabstand, in den man auch den Mond selber einklemmen kann. Mit zunehmender Annäherung der Bezugsstelle greift man allmählich mehr ab, schließlich nimmt man die zweite Hand zu Hilfe und endet vorn beim „Teller"[2]) (vgl. Fig. 3).

Bei Verfahren B, Nachbild, reiht sich der Tellermond ebenso an den Schluß des Versuchs mit 30 Minuten Sehwinkel; der zuletzt empfundene „Teller" kann, auf den Himmel verlegt,

1) Die Figuren 2 und 3 befinden sich auf Tafel II.

2) Die beiden Grenzwerte hat wohl jeder einmal erfahren. Einerseits den Teller in Greifnähe, zu dem unwillkürlich die Hände sich formen, anderseits aber auch den kaum 1 cm weiten Fingerabstand, der sich ergibt, wenn man bei ausgestrecktem Arm „probiert", wie breit der Mond „eigentlich" aussieht. Aber man hat die beiden nicht in Beziehung bringen können. Dies leistet das Verfahren C. Hier wird die Zentimeter-Messung (Ferne) mit der Tellerschätzung (Nähe) durch die stetig wachsenden Zwischenschätzungen gesetzmäßig verbunden. Und zugleich nicht nur für den Mond, nicht nur für die Himmelskörper, sondern für alle Sehdinge überhaupt. Als Sonderfall kann, mit einem gewissen Vorbehalt, die Hillebrandsche „Allee" gelten. Fig. 3 deutet das an.

ohne weiteres als dunkler „Mond" empfunden werden (passend auch als farbiger, heller).

Bei A lasse man im Gedankenexperiment den Mond von vorn in die Ferne marschieren, er wird dann so, wie es unser neues Sehwinkel-Gesetz fordert, kleiner und kleiner und sieht zuletzt, wenn er da ankommt, wo er hingehört, nach diesem Gesetz notwendigerweise wirklich so groß aus wie der Teller.

Weshalb erscheint der Mond wie ein Teller?

Weshalb sehen überhaupt ferne Gegenstände jeder Art, himmlische wie irdische, „so groß aus, wie sie aussehen"?

Weil und sofern sie nicht nach dem psychologischen „Sehwinkel-Aufhebungssatz" gewertet werden — unter Kleinerschätzung weiterer Entfernungen —; sondern — unter geringer Größerbewertung[1]) der Ferne — nach dem physikalischen Sehwinkel selber.

XXI.

Physikalisch wertvoll erscheint die Tatsache, daß die bekannten, viel belächelten volkstümlichen Angaben über Größen von Kometen, Art und Größe von Meteoren usw. danach doch verständlichen, den Durchschnittswerten nach ermittelbaren Gesetzen gehorchen und in dieser Weise wohl verwertbar sind.

Allerdings stecken eben auch persönliche Konstanten darin, die noch erforscht werden müssen. Überhaupt werden durch die neue Auffassung die Fragen eher vermehrt als vermindert. Aber sie bringt, wenn sie sich als richtig herausstellt, grundsätzlich Sinn, Ordnung und Zusammenhang in das Gebiet.

Von besonderem Interesse ist die Frage, was aus dem Problem der Vergrößerung des Mondes usw. wird, wenn man mit den hier gewonnenen zahlenmäßigen Ergebnissen über die Größe erneut an dasselbe herantritt. Es liegen eine große Anzahl physikalischer, physiologischer, psychologischer Erklärungsversuche vor, zu denen man Stellung nehmen muß. Ich hoffe, demnächst auf diese Frage zurückkommen zu können.

XXII.

Grundsätzlich noch eine Bemerkung.

Ich habe bei dieser zweiten Art des Sehens ausdrücklich das Wort „ein neuer, zweiter Sehraum" gebraucht („Sehraum II").

Damit behaupte ich zunächst nicht, daß dieser Raum seinem metrischen (oder unmittelbar sinnlichen) Ausdehnungseindruck nach, d. h. bezüglich der erlebten scheinbaren Punktentfernungen r, notwendigerweise ein anderer sein müsse als der Sternecksche Sehraum.

Er könnte weiter sein, sehr wohl. Er könnte meinetwegen auch etwas enger sein. Er könnte aber auch durchaus derselbe sein, seiner scheinbaren, erlebten Längenerstreckung nach, wie ihn Herr v. Sterneck errechnet hat.

Er ist nicht notwendigerweise ein anderer Raum: Er ist ein anders gearteter Raum.

Im Sterneck-Raum (Psychologen-Raum) gilt der Sehwinkel-Aufhebungssatz. Der ist recht eigentlich das Paßwort für den Sehraum der Psychologen. Jeder Körper wird innerhalb des starren Sehwinkel-Kegels an diejenige Stelle verlegt, welche die scheinbare Entfernung vorschreibt, und in demjenigen beträchtlichen Ausmaß wirklich erlebt, welches er an dieser Stelle hat.

In dem neuen Raum ist diese Verbindung zwischen scheinbarer Entfernung und scheinbarer Größe gelöst. Die scheinbaren Entfernungen mögen dieselben sein wie im Sterneck-Raum, die scheinbaren Größen sind es nicht. Die scheinbaren Größen sind viel, viel kleiner als dort. Sie werden eben nicht durch jenen „Sehwinkel-Aufhebungssatz" zu einer 10000fachen Höhe emporgehoben, sondern sie bleiben fort und fort dem abnehmenden Sehwinkel selber nah. —

Eine ganz andere Frage wäre, ob man dies Sehen zweiter Art nicht zuletzt und nachträglich wieder als ein Sehen erster Art deuten könnte. Das käme dann auf einen außerordentlich engen Sehraum hinaus, nämlich einen durch die „Referenzflächen" begrenzten, vielleicht den Rest eines ursprünglichen kindlichen Sehraums („Sehraum III"). Auch hierüber möchte ich uns ein Urteil noch vorbehalten. Mathematische Gründe sprechen dafür. Physiologische Tatsachen, wie mir scheint, zum wenigsten nicht dagegen. Das psychische Erlebnis drängt sich allerdings nicht so unmittelbar auf wie das Erleben der kleinen Gegenstandsgrößen.

Der neue Sehraum II wäre dann ein Durcheinander eines Sehraums I und eines Sehraums III: Entfernungen im Raume I, Gegenstandsgrößen im Raume III[1]).

---

1) Damit stimmt überein, daß man mit wachsender Blickferne unwillkürlich einen kleineren Gesamt-Bildwinkel ins Auge zu fassen pflegt. Beim Zeichnen von Durchblicken kommt man, wenn man mit der Ferne anfängt, leicht mit dem Zeichenblatt nicht aus; die Neigung zum Überhöhen ferner Berge mag zum Teil damit zusammenhängen. Sehr häufig ist der Mond usw. in Gemälden „zu groß".

1) Ob ich Helmholtz' bekannten Vergleich des Sehraums mit einem Reliefbild für diesen engen Sehraum III in Anspruch nehmen darf, wage ich nicht zu entscheiden (Physiol. Optik, 1. Aufl., S. 660). Herings Ausführungen scheinen einerseits einen engen Sehraum zu fordern, die Äußerungen über Sehferne u. a. m. lassen aber auf

XXIII.

Für die neue Art des Sehens selber und den neuen Sehraum möchte ich, falls diese Anschauungen Zustimmung finden, den Namen Laqueurscher Sehraum vorschlagen.

Herr Ernst Laqueur, o. Prof. der Physiologie an der flämischen Universität Gent, 1914 bis Mitte 1916 in Wolfenbüttel Abteilungsarzt, hat mich zu der Untersuchung über die scheinbare Mondgröße angeregt. Er hat in unseren gemeinsamen Überlegungen bereits die entscheidende Ansicht durchgeführt: Das Sehen, wobei etwas „so groß aussieht, wie . . .", bedeute grundsätzlich etwas anderes, als wenn man sieht, etwas „ist" das und das oder „ist so groß wie" das und das. Ich habe die Untersuchung nach seinem Weggang im selben Jahre 1916 zu Ende gebracht und meine Ergebnisse durch ausgebreitete Beobachtungen und Messungen mit Versuchspersonen bestätigt. Ich konnte sie bisher nicht veröffentlichen, weil mir infolge von schwerer Verwundung die Fähigkeit zum Darstellen fehlte, ich denke baldmöglichst an anderem Orte ausführlich zu berichten.

Meinem verehrten Freunde, der als Arzt des Körpers wie des Geistes in fast täglichem Bemühen meinen am Boden liegenden Fähigkeiten aufgeholfen hat, heute, wo ich die erste Frucht gemeinsamer Arbeit vorlege, zu danken, ist mir Herzensbedürfnis.

einen weiten Sehraum schließen (Physiol. Optik, Leipzig 1879, S. 343, 542, 552, 578, 582). — Während der Korrektur finde ich eine enge Zahlenschätzung (30 m) bei Mach, Erkenntnis und Irrtum, Leipzig 1905, S. 332, mit einer allerdings unklaren Berufung auf einen Nachbildversuch Plateaus.

XXIV.

Zusammenfassung.

Psychologie und Physiologie lehren auf Grund eines „Sehwinkel-Aufhebungssatzes" einen „Sehraum", der dem wahren Raum nahebleibt. In diesem Sehraum werden die Gegenstände bis auf erhebliche Entfernungen hin in ihrer wahren natürlichen Größe gesehen, erst allmählich und langsam nimmt die scheinbare Größe infolge Unterschätzens weiterer Entfernungen einigermaßen ab.

Es gibt außerdem eine ganz andere Art des räumlichen Größen-Sehens. Sie steht dem physikalischen Begriff der scheinbaren Größe nahe: Sehwinkel, Netzhautbild. Hier nimmt der Größeneindruck zwar nicht vollkommen, aber doch nahe ebenso schnell wie der Schwinkel ab.

Zu dieser zweiten Art des Sehens gehören unter anderem gewisse volkstümliche Angaben über Himmelserscheinungen, die danach sehr wohl zahlenmäßig gedeutet und benutzt werden können.

Wolfenbüttel (Techn. Hochschule Braunschweig), Januar 1918.

(Eingegangen 6. Februar 1918.)

BESPRECHUNGEN.

A. Sommerfeld, Goethes Farbenlehre im Urteile der Zeit. Deutsche Revue, Juliheft 1917. 7 S.

Im 9. Heft des 18. Jahrganges dieser Zeitschrift (S. 206) habe ich über den Aufsatz berichtet, den der kürzlich verstorbene Raehlmann im Jahrbuch der Goethe-Gesellschaft über Goethes Farbenlehre hat erscheinen lassen. Inzwischen ist die kriegsmäßige Neuausgabe der beiden Goethe-Vorträge von Helmholtz hier (18, 468, 1917) angezeigt worden. Jetzt liegt als Drittes ein Aufsatz von Sommerfeld über Goethes Farbenlehre vor, und der Leser der Zeitschrift wird am Ende ausrufen: Goethe und kein Ende! In der Tat — so erfreulich das Interesse an Goethe ist, so könnte man doch dieses Wort Du Bois-Reymonds wenigstens auf die Bewegung anwenden, die den Anlaß zu dem Aufsatze Sommerfelds gegeben hat, und die, wie ich nachträglich bemerken kann, auch Raehlmann zur Veröffentlichung seiner Abhandlung bewogen hat, wenn auch dieser Anlaß im Rahmen seiner Schrift nicht ausdrücklich erwähnt wird. Verf. berichtet, daß seit drei Jahren in Münchner Künstlerkreisen eine Bewegung besteht, die darauf ausgeht, Goethes Farbenlehre gegenüber den Physikern, die sie verwerfen, wieder zu vollster Anerkennung zu bringen. Die Ursache dieser Bewegung scheint aber nicht bloß ein gänzlicher Mangel an Verständnis für das Wesen und die Ergebnisse der Naturforschung zu sein, sondern daneben oder vielleicht gar darüber hinaus der unselige Nationalitätenhaß dieser Kriegszeit, der das deutsche Volk scharf machen möchte gegen den „Engländer" Newton. Wir haben gewiß allen Grund, uns gegen die Verunglimpfung der deutschen Wissenschaft durch unsere Gegner auf das schärfste und mit allen Mitteln zu wehren. Aber die Wissenschaft deswegen auf den Kopf stellen, das geht doch wirklich nicht. Es ist sehr verdienstlich von Herrn Sommerfeld, das er in einer angesehenen und viel gelesenen Zeitschrift dieses Treiben einmal beleuchtet. Das geschieht mit knappen Worten zu Beginn des Aufsatzes. Dann bespricht er in kurzen Abschnitten die Beurteilung von Goethes Farbenlehre durch Helmholtz und durch Bezold, das Verhältnis der physikalischen und der physiologischen Seite des Problems, Goethes Stellung als Naturforscher, Goethe als Phänomenologe und schließt mit

einer schönen Auswahl von Proben aus dem „reichen und mannigfaltigen Beobachtungsmaterial, welches Goethe mit soviel Liebe in seiner Farbenlehre zusammengetragen hat". Von besonderem Interesse sind die Ausführungen über Goethe als Phänomenologen, in denen Verf. sehr geschickt und treffend den Standpunkt Goethes und den Standpunkt Machs in Parallele stellt. W. König.

J. A. Möllinger, Wirkungsweise der Motorzähler und Meßwandler. gr. 8°. VI u. 186 S. mit 87 Abbildungen. Berlin, Julius Springer. 1917. Geb. M. 5.80.

Verf. hat in seinem Buche eine Klasse von Apparaten behandelt, die dem Physiker in der Regel etwas fern liegen. Immerhin bieten die Drehfeld-Meßgeräte und Meßwandler auch so viele interessante, theoretische Fragen, daß sie größere Beachtung verdienten. Das Buch von Möllinger ist geeignet, in diese Fragen einzuführen und hinreichenden Aufschluß über den augenblicklichen Stand der Forschung auf diesem Gebiete zu geben. Es zeichnet sich vor Büchern, die denselben Gegenstand behandeln, dadurch aus, daß es eine große Menge von Zahlenbeispielen bringt, die der Praxis entnommen sind und einen guten anschaulichen Begriff von der Leistungsfähigkeit dieser Apparate geben.

In einem besonderen Kapitel werden die Grundlagen der Wechselstromtechnik behandelt. Dieses Kapitel hätte nur dann eine Berechtigung, wenn diese Darstellung sich in irgendeiner Weise vor den üblichen nach Form oder Inhalt auszeichnete. Das ist aber nicht der Fall. Es wäre wohl daher besser weggeblieben. Bei der Darstellung der Wechselströme durch Vektoren ist bedauerlicherweise ein Drehsinn gewählt, der dem durch internationale Abmachung angenommenen entgegengerichtet ist. Alles in allem kann das Buch demjenigen, der sich für diese Spezialfragen interessiert, nur aufs wärmste empfohlen werden.

E. Orlich.

A. Einstein, Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie. Gemeinverständlich. (Sammlung Tagesfragen Heft 38. Herausgegeben von Karl Scheel.) 8°. IV u. 70 S. mit 3 Figuren. Braunschweig, Friedr. Vieweg u. Sohn. 1917. M. 2.80.

Verf. sagt im Vorwort: „Das vorliegende Büchlein soll solchen eine möglichst exakte Einsicht in die Relativitätstheorie vermitteln, die sich vom allgemein wissenschaftlichen, philosophischen Standpunkte für die Theorie interessieren, ohne den mathematischen Apparat der theoretischen Physik zu beherrschen. Die Lektüre setzt etwas Maturitätsbildung und — trotz der Kürze des Büchleins — ziemlich viel Geduld und Willenskraft beim Leser voraus. Der Verf. hat sich die größte Mühe gegeben, die Hauptgedanken möglichst deutlich und einfach vorzubringen, im ganzen in solcher Reihenfolge und in solchem Zusammenhange, wie sie tatsächlich entstanden sind."

In dieser Zeitschrift bedarf eine Schrift von Einstein keiner Empfehlung. Ich glaube aber, es wäre von hohem Interesse, mit dieser Schrift ein Experiment zu machen: sie einer größeren Anzahl von Lesern, für welche Einstein sie geschrieben hat, in die Hand zu geben und sie aufzufordern nach der Lektüre anzugeben, was ihren Widerspruch geweckt, beziehentlich was sie nicht verstanden haben. Ohne an die Diskussion der Theorie irgendwie rühren zu wollen, muß ich offen bekennen: Ich glaube nicht, daß Einstein mit dieser Darstellung bei den mit bestem Willen nachdenkenden, nicht physikalisch gebildeten Durchschnittslesern im obigen Sinne das erstrebte klare Verständnis der Sache erreichen wird. — H. Hörig.

K. Schwarzschild, Über das System der Fixsterne. Aus populären Vorträgen. (Naturwissenschaftliche Vorträge und Schriften, herausgegeben von der Berliner Urania. 1. Heft.) 8°. 44 S. mit 13 Figuren im Text. 2. Aufl. Leipzig, B. G. Teubner. 1916. M. 1.20.

Daß dieses kleine Heftchen, welches vier vom Verf. in den Jahren 1907 und 1908 gehaltene Vorträge kurz wiedergibt und zum erstenmal im Jahre 1909 als Gabe zu Geheimrat von Seeligers sechzigstem Geburtstage gedruckt wurde, einen Neudruck notwendig machte, dürfte schon ein Beweis für den Wert seines Inhalts sein. Der erste, ganz populäre Vortrag behandelt das Fernrohr und die Grenze seiner Leistungsfähigkeit und bietet dem Physiker nichts Neues. Um so mehr ist dies aber der Fall in den drei weiteren Vorträgen „Über Lamberts kosmologische Briefe", „Über das System der Fixsterne" und „Vom Universum", in denen unsere jetzigen Kenntnisse von der räumlichen Verteilung, den Bewegungen und dem physischen Zustande der Fixsterne in einer allgemein verständlichen Form sehr geschickt dargestellt werden.

J. Hartmann.

Personalien.

(Die Herausgeber bitten die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Ernannt: Das wissenschaftliche Mitglied des Georg-Speyer-Hauses in Frankfurt a. M. Dr. Paul Karrer zum a. o. Professor für aromatische Chemie an der Universität Zürich, der frühere Konservator des Physikalischen Instituts der Universität Leiden und derzeitige Dozent an der Reichstierarzneischule Utrecht Dr. W. H. Keesom zum ord. Professor der Physik und physikalischen Chemie an der neuerrichteten Tierärztlichen Hochschule Utrecht.

Verliehen: Dem Privatdozenten für theoretische Physik an der Universität Göttingen Dr. Paul Hertz der Titel Professor.

Gestorben: Der frühere ord. Professor der Elektrotechnik an der Deutschen Technischen Hochschule Prag Hofrat Dr. Johann Puluj.

Für die Schriftleitung verantwortlich Geh. Regierungsrat Prof. Dr. H. Th. Simon in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

Fig. 2.

OBERLIN
COLLEGE
LIBRARY

Fig. 3.

Inhaltsverzeichnis:

(T. — Tagesereignisse.)

Seite

Bauer, H., Über die Energiekomponenten des Gravitationsfeldes 163

Einstein, A., Bemerkung zu Herrn Schrödingers Notiz „Über ein Lösungssystem der allgemein kovarianten Gravitationsgleichungen" 165

Einsteinsche Gravitationstheorie: Über den Einfluß der Eigenrotation der Zentralkörper auf die Bewegung der Planeten und Monde nach der —, v. J. Lense u. H. Thirring 156

Energiekomponenten: Über die — des Gravitationsfeldes, v. H. Bauer 163

Flamm, L., Bemerkungen zu den statistischen Grundlagen der Quantentheorie 166

Gravitationsfeld: Über die Energiekomponenten des —, v. H. Bauer 163

Gravitationsgleichungen: Bemerkung zu Herrn Schrödingers Notiz „Über ein Lösungssystem der allgemein kovarianten —", v. A. Einstein 165

Gravitationstheorie: Über den Einfluß der Eigenrotation der Zentralkörper auf die Bewegung der Planeten und Monde nach der Einsteinschen —, v. J. Lense u. H. Thirring 156

Kovariante Gravitationsgleichungen: Bemerkung zu Herrn Schrödingers Notiz „Über ein Lösungssystem der allgemein —", v. A. Einstein 165

Lense, J. u. H. Thirring, Über den Einfluß der Eigenrotation der Zentralkörper auf die Bewegung der Planeten und Monde nach der Einsteinschen Gravitationstheorie 156

Malmström, R., Versuch zur Erweiterung des Riemannschen Elementargesetzes 153

Monde: Über den Einfluß der Eigenrotation der Zentralkörper auf die Bewegung der Planeten und — nach der Einsteinschen Gravitationstheorie, v. J. Lense u. H. Thirring 156

Planck, M., Vorträge über Quantentheorie. (T.) . . 176

Planeten: Über den Einfluß der Eigenrotation der Zentralkörper auf die Bewegung der — und Monde nach der Einsteinschen Gravitationstheorie, v. J. Lense u. H. Thirring 156

Quantentheorie: Bemerkungen zu den statistischen Grundlagen der —, v. L. Flamm 166

— Vorträge über —, v. M. Planck. (T.) 176

Riemannsches Elementargesetz: Versuch zur Erweiterung des —, v. R. Malmström 153

Schrödinger: Bemerkung zu Herrn — Notiz „Über ein Lösungssystem der allgemein kovarianten Gravitationsgleichungen", v. A. Einstein 165

Thirring, H. u. J. Lense, Über den Einfluß der Eigenrotation der Zentralkörper auf die Bewegung der Planeten und Monde nach der Einsteinschen Gravitationstheorie 156

Vorlesungsverzeichnis für das Sommersemester 1918 . 168

Verlag von S. Hirzel in Leipzig.

Der Lichtbogen als Wechselstromerzeuger

Mit besonderer Berücksichtigung des Bogens zwischen Metallelektroden

von

Prof. Dr. K. Willy Wagner

Privatdozent an der Technischen Hochschule Berlin.

Mit 44 Textfiguren. Preis geheftet M. 3.60 exkl. 30% Teuerungszuschlag.

Neuste Konstruktion!

Kugelspitzenp. D.R.P. 250814.

Franz Schmidt & Haensch

Berlin S. 42, Prinzessinnenstraße 16

Werkstätten für Präzisions-Mechanik und Optik.

Neue optische Spezialinstrumente eigener Konstruktion, Polarisations-, Spektral-, Projektionsapparate, Episkope u. a.

Preislisten kostenlos.